Теорема Виета для многочленов

Теорема Виета. Пусть многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\ldots$$
$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$
$$\ldots$$
$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

0. Рассмотрим всевозможные тройки вещественных чисел x, y, z, которые удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}.$$

Докажите, что во всех этих тройках есть общее число, и найдите это число.

1. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_3^2}$.

2. У многочлена с целыми коэффициентами $x^3 + px + q$ имеется три различных вещественных корня. Докажите, что сумма кубов этих корней есть целое число, кратное трем.

3. Известно, что $a + b + c = d$, и что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

Докажите, что по меньшей мере одно из чисел a, b и c равно d.

4. Известно, что $a + b + c = d + e + f$, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ и $a^3 + b^3 + c^3 = d^3 + e^3 + f^3$. Докажите, что $a^n + b^n + c^n = d^n + e^n + f^n$ для любого n.

5. Многочлен $ax^n - ax^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2x^2 - n^2bx + b$ имеет n положительных корней. Докажите, что все они равны.

6. Даны такие действительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \leqslant b_1$, то $a_3 \leqslant b_3$.

7. На доске написано несколько приведенных многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведенных многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

8. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?