Теорема Безу.

Теорема Безу. Многочлен $P(x)$ при делении на $x-a$ дает остаток $P(a)$.

Следствие №1. $P(x)$ имеет корень a тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $x-a$.

Следствие №2. Многочлен степени n имеет не более n действительных корней.

Следствие №3. Если два многочлена степени не более чем n совпадают в $n+1$ точке, то они совпадают во всех точках.

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^{1000}+12x^{500}+2x+1$ на x^2-1.

2. **(а)** Докажите, что многочлен $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ делится на $(a-b)(b-c)(c-a)$.

(б) Докажите, что многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$ делится на $x+y+z$.

(в) Докажите, что при нечётном m многочлен $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ делится на $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

3. Про многочлен $f(x)=x^{10}+a_9x^9+\ldots+a_0$ известно, что $f(1)=f(-1),\ldots,f(5)=f(-5)$. Докажите, что $f(x)=f(-x)$ для любого действительного x.

4. Найдите все многочлены $P(x)$, такие что $xP(x-1)=(x-26)P(x)$.

5. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?

6. Множество из 2023 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.

7. Многочлен 10 степени таков, что $P(n)=\dfrac{1}{n}$ для всех $n=1,\ldots,11$. Найдите значение $P(12)$.