Неоднородность в теории чисел

0. Существуют ли 2026 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму всех чисел?

Идея. Чтобы придумать пример, можно взять набор из произвольных чисел и поменять его, домножив на что-нибудь.

1. Существуют ли 2026 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?

2. Найдите два различных натуральных числа, сумма квадратов которых является кубом, а сумма кубов – квадратом.

3. **(а)** Имеет ли уравнение $a^{2023} + b^{2024} = c^{2025}$ решение в натуральных числах?

(б) Имеет ли уравнение $a^{2024} + b^{2024} = c^{2025}$ решение в натуральных числах, причём a — нечётно?

4. Существуют ли натуральные числа $a_1 < a_2 < ... < a_{2026}$, для которых $[a_1; a_2] > [a_2; a_3] > ... > [a_{2025}; a_{2026}]$?

5. Найдите четыре различных числа a, b, c и d, больших миллиона, таких, что: $a + bc$ делится на d, $b + cd$ делится на a, $c + da$ делится на b и $d + ab$ делится на c.

6. Существуют ли числа a, b, c такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025, и при этом эти числа
(а) больше 10^6,
(б) больше 10^{100},
(в) больше 10^{100} и различны.

7. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1, d_1 найдутся два равных?

8. Найдутся ли 100 различных натуральных чисел, и сумма, и произведение которых — 60-ая степень натурального числа?