# Китайская теорема об остатках

**Формулировка китайской теоремы об остатках:**
Если натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ система

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

имеет решение, и оно единственно по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.

**Конструктивный факт:**
Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты. Докажите, что число

$$x = (m_2 \ldots m_k)^{\varphi(m_1)}$$

является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

Как с помощью этого факта вывести формулу решения системы из КТО?

---

**1.** Докажите, что найдутся 2026 подряд идущих чисел, каждое из которых делится на куб некоторого натурального числа, больше 1.

**2.** Докажите, что найдутся 2026 подряд идущих чисел, каждое из которых
**(а)** не является степенью простого числа,
**(б)** не является степенью натурального числа выше первой.

**3.** Назовем целочисленную точку на координатной плоскости *примитивной*, если её координаты взаимно просты. Докажите, что найдется квадрат со стороной 2026, внутри которого нет примитивных точек.

**4.** Дано несколько натуральных чисел. Докажите, что их все можно домножить на некоторое натуральное число так, чтобы все произведения стали степенями натуральных чисел выше первой.

**5.** Найдите все натуральные $n > 1$, для которых любое целое число можно представить в виде суммы двух целых чисел, каждое из которых взаимно просто с $n$.

*На другой стороне ещё задачи.*

**6.** Дано натуральное $n$ и различные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \geqslant 2$) от 1 до $n$. Известно, что $a_i(a_{i+1} - 1)$ делится на $n$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Докажите, что $a_k(a_1 - 1)$ не делится на $n$.

**7.** Докажите, что существует такое $n$, что $n^2 + n + 1$ имеет хотя бы 2026 различных простых делителя.

**8.** При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных $k$ число $(b_1 + k)(b_2 + + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? *(Показатель степени может зависеть от $k$, но должен быть всегда больше 1.)*