Разнобой по теории чисел с прошлого занятия + дорешка.

1. Пусть для некоторых натуральных a, b, c число $3^a+3^b+3^c$ является точным квадратом. Докажите, что $a = b = c$.

2. К натуральному числу $a > 1$ приписали это же число и получили число b, кратное a^2. Найдите все возможные значения числа $\dfrac{b}{a^2}$.

3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные a, b, что $4a^2 + 9b^2 - 1$ делится на n.

4. Натуральные числа a и b таковы, что $a + b^3$ делится на $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$. Докажите, что $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ делится на куб некоторого целого числа, большего 1.

5. Найдите все целые решения уравнения $2x^6 + y^7 = 11$.

6. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p - m - n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.

Из обратных остатков:

5. Пусть $p = 4k + 3$ — простое число, а $\frac{m}{n}$ — такая несократимая дробь, что

$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2+1} = \frac{m}{n}$$

Докажите, что $2m - n$ делится на p.

6. Докажите, что для каждого простого p числа от 1 до $p-1$ можно выписать в ряд $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ так, что все произведения $a_1 a_2 \ldots a_k$ различны по модулю p.

7. Пусть p — простое число, большее 2. Докажите, что существует такая перестановка $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ чисел $(1, 2, \ldots, p-1)$, что

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{p-2} x_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$$

Из композиций квадратных трёхчленов:

5. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

6. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -1/4$.

7. Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ с комплексными коэффициентами. Известно, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных корня: $x = 3, 4, a, b$. Найдите сумму всех возможных значений $(a + b)^2$.