

Композиции квадратных трёхчленов

1. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет три различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — семь различных корней?
 2. Пусть $f(x) = x^2 + 6x + 6$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$.
 3. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен, у которого коэффициент при x^2 равен 1. Известно, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет четыре различных корня: $x = 3, 4, a, b$. Найдите сумму всех возможных значений $(a + b)^2$.
 4. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ и число a . Оказалось что $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ образуют геометрическую прогрессию с положительным знаменателем. Докажите, что эта прогрессия постоянна.
 5. Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлены $f(x)$ и $f(f(f(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $f(0)f(1) = 0$.
-
6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены. Известно, что уравнения $P(Q(x)) = 0$ и $Q(P(x)) = 0$ не имеют действительных корней. Докажите, что по крайней мере одно из уравнений $P(P(x)) = 0$ или $Q(Q(x)) = 0$ также не имеет действительных корней.
 7. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, и $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех действительных x . Докажите, что $f(x) = h(x)$.
 8. Дан многочлен $P(x)$ вида $x^2 + px + q$. Известно, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет ровно четыре различных вещественных решения. При этом среди этих решений найдется пара, сумма которой равна -1 . Докажите, что свободный член q удовлетворяет неравенству $q \leq -0,25$.
 9. Даны три квадратных трёхчлена $f_1(x), f_2(x)$ и $f_3(x)$. Могут ли у уравнения $f_1(f_2(f_3(x))) = 0$ быть корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?