

Соответствия

0. Последовательность из пяти цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 будем называть «горой», если $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$, и «ямой», если $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5$. Чего больше: «гор» или «ям»?
1. Петя подсчитал количество всевозможных n -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы А, В, С и D, причём в каждом слове букв А и В поровну. Вася подсчитал количество всевозможных $2n$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы А и В, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)
2. Дана шахматная доска. Её вертикали пронумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от а до h. Рассматриваются покрытия доски доминошками. Каких разбиений больше: тех, которые содержат доминошку a1-a2, или тех, которые содержат доминошку b2-b3?
3. Докажите, что при любом натуральном n уравнения

$$x^2 + y^2 = n \text{ и } x^2 + y^2 = 2n$$

имеют одинаковое количество решений в целых числах.

4. Упорный Ярослав выписал все возможные наборы из 100 целых чисел от 2 до 2026. Настоячивая Софья посчитала сумму чисел в каждом наборе. Проходивший мимо Владислав нашел остаток от деления каждой суммы на 3. Каких остатков у него получилось больше: 0, 1 или 2?
5. Докажите, что число способов разбить n в сумму различных слагаемых равно числу способов разбить n в сумму нечетных слагаемых.
6. Даня рисует пейзаж «Река»: картина 8×8 пикселей, каждый пиксель одного из двух цветов: синий или оранжевый. Пейзаж удачный, если на картине есть подобие «реки»: последовательность граничащих друг с другом по стороне синих клеток, среди которых есть клетка в самом левом и в самом правом столбце. Докажите, что среди всевозможных 2^{64} пейзажей удачных меньше половины.

-
7. Является ли чётным число всех 20-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?
 8. Дано натуральное число n . Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2 ?

9. Дано натуральное число n и его делитель d . Рассмотрим всевозможные наборы из n целых неотрицательных чисел, не больших n , сумма которых кратна d . Докажите, что ровно в половине таких наборов наибольшее число кратно n .