

Системы вычетов

Полной системой вычетов по модулю n называется множество целых чисел, в котором все остатки при делении на n встречаются ровно один раз.

Основное свойство ПСВ (n, m, b) — **целые**.

Если $(n; m) = 1$, то $\{b, m + b, 2m + b, 3m + b, \dots, (n - 1)m + b\}$ — ПСВ по $\text{mod } n$.

Приведённой системой вычетов по модулю n называется множество целых чисел, в котором каждый остаток при делении на n , взаимно простой с n , встречается ровно один раз.

Основное свойство ПрСВ.

Если $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$ — ПрСВ по $\text{mod } n$, $(n; m) = 1$, то $\{ma_1, ma_2, \dots, ma_{\varphi(n)}\}$ — тоже ПрСВ по $\text{mod } n$.

1. Дано простое число $p > 5$. Докажите, что существуют различные целые неотрицательные числа a, b, c, d, e , каждое из которых меньше p , и такие, что $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ делится на p .
2. Пусть n — нечётное натуральное число. Докажите, что наборов из k различных натуральных чисел, меньших n , сумма чисел в котором даёт остаток 1 по модулю n , столько же, сколько наборов, сумма которых даёт остаток 2 по модулю n .
3. Докажите (не используя формулу, а из соображений про ПрСВ), что если $(a, b) = 1$, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
4. (а) Пусть $p > 2$ — простое число. Существует ли перестановка $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ натуральных чисел $1, 2, \dots, p-1$ такая, что числа $a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, (p-1)a_{p-1}$ образуют приведённую систему вычетов по модулю p ?
(б) Пусть $p = 4k + 1$ — простое число. Существует ли перестановка $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ чисел $1, 2, 3, \dots, p-1$ такая, что числа $1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, (p-1)^{a_{p-1}}$ образуют приведённую систему вычетов по модулю p ?
5. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что среди любых $p + 1$ целых чисел можно выбрать $p - 1$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ так, чтобы $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1)a_{p-1}$ делилось на p .
6. Пусть p — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько натуральных чисел из набора $\{1, 2, 3, \dots, p-1, p\}$ так, чтобы их сумма делилась на p ?
7. Дано нечётное простое число p . Последовательность целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_p$, каждое из которых меньше p , назовём *прекрасной*,

если

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ не делится на p ;
- $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ делится на p .

Найдите количество прекрасных последовательностей.