# Неоднородность в теории чисел

**0.** Существуют ли 2026 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму всех чисел?

**Идея.** Чтобы придумать пример, можно взять набор из произвольных чисел и поменять его, домножив на что-нибудь.

**1.** Существуют ли 2026 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?

**2.** Найдите два различных натуральных числа, сумма квадратов которых является кубом, а сумма кубов – квадратом.

**3.** **(а)** Имеет ли уравнение $a^{2023} + b^{2024} = c^{2025}$ решение в натуральных числах?

**(б)** Имеет ли уравнение $a^{2024} + b^{2024} = c^{2025}$ решение в натуральных числах, причём $a$ — нечётно?

**4.** Существуют ли натуральные числа $a_1 < a_2 < ... < a_{2026}$, для которых $[a_1; a_2] > [a_2; a_3] > \ldots > [a_{2025}; a_{2026}]$?

**5.** Найдите четыре различных числа $a$, $b$, $c$ и $d$, больших миллиона, таких, что: $a + bc$ делится на $d$, $b + cd$ делится на $a$, $c + da$ делится на $b$ и $d + ab$ делится на $c$.

---

**6.** Существуют ли числа $a, b, c$ такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2025, и при этом эти числа
**(а)** больше $10^6$,
**(б)** больше $10^{100}$,
**(в)** больше $10^{100}$ и различны.

**7.** Натуральное число $N$ представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где $a_1$ и $a_2$ — квадраты, $b_1$ и $b_2$ — кубы, $c_1$ и $c_2$ — пятые степени, $d_1$ и $d_2$ — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел $a_1, b_1, c_1, d_1$ найдутся два равных?

**8.** Найдутся ли 100 различных натуральных чисел, и сумма, и произведение которых — 60-ая степень натурального числа?