Китайская теорема об остатках

Формулировка китайской теоремы об остатках:
Если натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ система

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

имеет решение, и оно единственно по модулю $m_1 m_2 \ldots m_k$.

Конструктивный факт:
Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты. Докажите, что число

$$x = (m_2 \ldots m_k)^{\varphi(m_1)}$$

является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

Как с помощью этого факта вывести формулу решения системы из КТО?

---

1. Докажите, что найдутся 2026 подряд идущих чисел, каждое из которых делится на куб некоторого натурального числа, больше 1.

2. Докажите, что найдутся 2026 подряд идущих чисел, каждое из которых
(а) не является степенью простого числа,
(б) не является степенью натурального числа выше первой.

3. Назовем целочисленную точку на координатной плоскости *примитивной*, если её координаты взаимно просты. Докажите, что найдется квадрат со стороной 2026, внутри которого нет примитивных точек.

4. Дано несколько натуральных чисел. Докажите, что их все можно домножить на некоторое натуральное число так, чтобы все произведения стали степенями натуральных чисел выше первой.

5. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых любое целое число можно представить в виде суммы двух целых чисел, каждое из которых взаимно просто с n.

6. Дано натуральное n и различные целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \geqslant 2$) от 1 до n. Известно, что $a_i(a_{i+1} - 1)$ делится на n для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Докажите, что $a_k(a_1 - 1)$ не делится на n.

7. Докажите, что существует такое n, что $n^2 + n + 1$ имеет хотя бы 2026 различных простых делителя.

8. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? *(Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)*