Анализ позиций

1. **(а)** Имеется шоколадка $m \times n$. За один ход можно съесть дольку, а также все дольки, которые находятся выше, правее, а также выше и правее выбранной. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю дольку. Кто выигрывает при правильной игре?

(б) Паша и Витя играют в игру на прямоугольнике 10×20, в каждой клетке которого лежит фишка, одна сторона которой белая, а другая — чёрная. За один ход разрешается выбрать белую фишку и перевернуть её и все фишки, лежащие нестрого правее и нестрого ниже её. Проигрывает не имеющий хода, начинает Паша. Какова вероятность, что Паша выиграет? Другими словами, чему равна доля всех начальных положений, в которых Паша выигрывает?

2. В колоде 2 красные и 100 чёрных карт. Играют двое. В свой ход каждый вытягивает из колоды любую красную карту и помещает её в любое место колоды, но выше того места, где она была до этого. Если две красные карты лежат рядом, разрешается вытянуть обе и поместить их в колоду как единое целое, также выше того места, где они лежали. Победит тот, кто добьётся, чтобы обе красные карты лежали сверху колоды. Опишите все возможные расположения красных карт, при которых побеждает второй игрок.

3. Из клетчатого прямоугольника $m \times n$, где $m, n \geq 3$, удалили все внутренние клетки. Осталась рамка из $2m + 2n - 4$ белых клеток. Двое по очереди закрашивают прямоугольник, состоящий из одной или нескольких ещё белых клеток рамки. После каждого хода оставшиеся белые клетки, если они есть, должны образовывать связную по сторонам область. Сделавший последний ход выигрывает. Найдите все пары (m, n), при которых первый игрок имеет выигрышную стратегию.

4. В ряд расположены $n \geq 5$ клеток, пронумерованных от 1 до n. Вначале фишка стоит в первой клетке. Двое по очереди передвигают её одним из трёх способов: на одну клетку вправо, на четыре клетки вправо или на две клетки **влево**. Выходить за границы ряда нельзя. Выигрывает тот, кто поставит фишку в клетку n. Для каких n выигрышная стратегия есть у первого игрока, а для каких — у второго?

5. В двух кучках лежат a и b печений, где a, b — положительные целые числа. За ход игрок выбирает одну кучку, берёт из неё $2k$ печений, k съедает, а остальные k перекладывает в другую кучку. Здесь k — любое положительное целое число, для которого ход возможен. Игроки ходят по очереди; тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Найдите все начальные пары (a, b), при которых второй игрок имеет выигрышную стратегию.

6. Миша и Маша едут в автомобиле вниз по бесконечному бинарному дереву, при этом по очереди решают, куда поворачивать на очередном перекрёстке (на чётных уровнях — Миша, на нечётных — Маша). На некоторых перекрёстках имеются забегаловки. Если они попали в один из таких перекрёстков, то Миша выиграл; бесконечный путь, не попадающий ни в одну из забегаловок, — выигрыш для Маши. Докажите, что при любом расположении забегаловок у одного из них есть выигрышная стратегия.

7. Есть 17 куч из монет, в первой одна, во второй две, и т.д. Играют Петя и Вася, Петя начинает. Ход такой: человек, у которого монет больше (если поровну, то ходивший в прошлый раз) выбирает еще не выбранную кучу. Его соперник решает, кому она достанется из них двоих. Далее следующий ход. Выигрывает тот, у кого в конце больше монет. Кто?

8. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если A бьёт B, а B бьёт C, то может оказаться, что C бьёт A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.