Дорешка

Алгебра и теория чисел

Обратные остатки

6. Пусть p — простое число, большее 2. Докажите, что существует такая перестановка $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ чисел $(1, 2, \ldots, p-1)$, что

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{p-2}x_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}$$

7. Докажите, что для любого натурального k можно выбрать различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{k+3}$ и простое число p так, что $a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3} - i$ делится на p для всех натуральных $i = 1, 2, \ldots, k$.

Композиции квадратных трёхчленов

7. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, и $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех действительных x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.

8. Дан многочлен $P(x)$ вида $x^2 + px + q$. Известно, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет ровно четыре различных вещественных решения. При этом среди этих решений найдется пара, сумма которой равна -1. Докажите, что свободный член q удовлетворяет неравенству $q \leqslant -0{,}25$.

9. Даны три квадратных трехчлена $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Могут ли у уравнения $f_1(f_2(f_3(x))) = 0$ быть корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

Разнобой по теории чисел

5. Найдите все целые решения уравнения $2x^6 + y^7 = 11$.

6. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p - m - n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.