Оценка + пример

1. В каждую клетку шахматной доски 8×8 записано натуральное число от 1 до 64, все числа различны. Шахматный король хочет пройти по нескольким клеткам доски (стартовую точку он выбирает сам) так, чтобы в каждой следующей клетке число было больше предыдущего. Какое наибольшее количество клеток он гарантированно может посетить (независимо от расстановки чисел)?

2. Петя расставил числа $1, 2, \ldots, 9$ в клетки квадрата 3×3, каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?

3. Фигура мамонт бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

4. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

5. В стране 21 город. Каждая из авиакомпаний попарно связывает беспересадочными авиалиниями 5 городов (при этом между двумя городами могут летать самолёты разных авиакомпаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспересадочной линией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

6. Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, …, N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?