Отрезки касательных

1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC.
(а) Докажите, что M равноудалена от точек касания вписанной и вневписанной окружностей с отрезком BC.
(б) Докажите, что M равноудалена от точек касания вневписанных окружностей с продолжениями стороны BC.

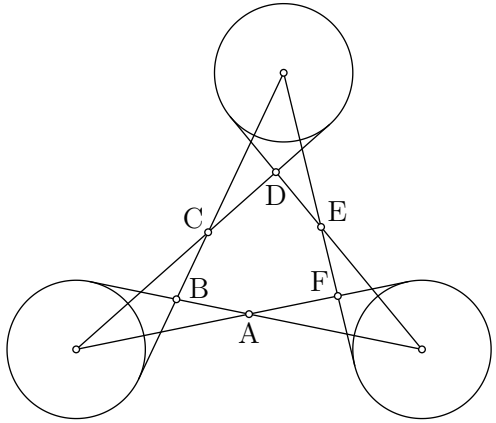
2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC.
(а) Докажите, что если окружности ω_D и ω_B касаются, то в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.
(б) Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то тогда окружности ω_D и ω_B касаются.

3. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB = CD$). Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD, перпендикулярна основаниям трапеции.

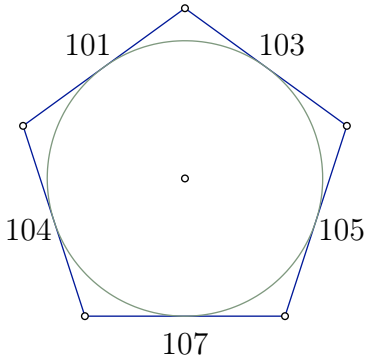
4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD в точках M и N. Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

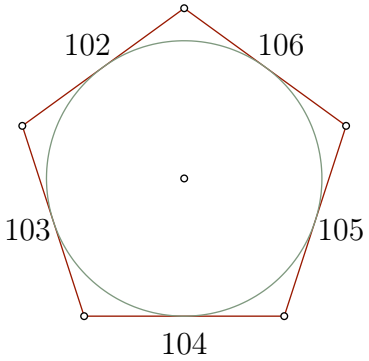
5. Даны три окружности равного радиуса. Для каждой окружности из её центра проведены касательные к двум другим окружностям так, как показано на рисунке. Докажите, что

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$



6. На рисунке изображены два описанных пятиугольника и подписаны длины всех сторон этих пятиугольников. Докажите, что радиусы вписанных окружностей этих пятиугольников равны.





7. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A, на другом — точки B и C так, что отрезок AB касается окружности ω_I и отрезок AC касается окружности ω_J. Вневписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D. Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D.

8. На сторонах AB, AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z.
(а) Докажите, что если четырёхугольник $AXZY$ — описанный, то четырёхугольник $BCDZ$ — тоже описанный.
(б) Докажите, что если четырёхугольник $BCDZ$ — описанный, то четырёхугольник $AXZY$ — тоже описанный.

9. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от прямой BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.