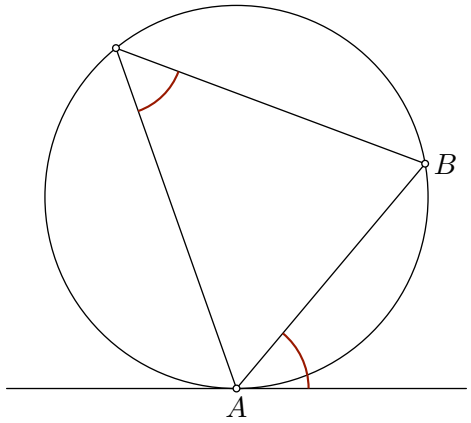
Угол между хордой и касательной

Теорема. На окружности ω отмечены точки A и B, а через точку A проведена прямая ℓ. Тогда прямая ℓ касается окружности ω, если и только если дуга $\overset{\frown}{AB}$ вдвое больше угла между ℓ и хордой AB.



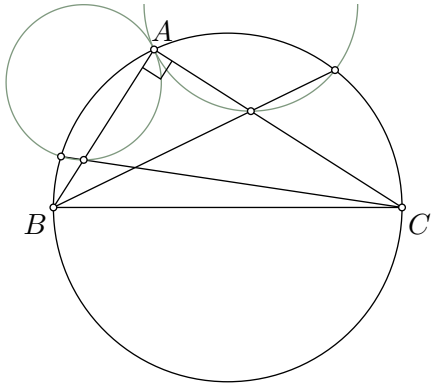
1. Касательная к описанной окружности неравноберенного треугольника ABC, восстановленная в вершине A, пересекает прямую BC в точке S; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.

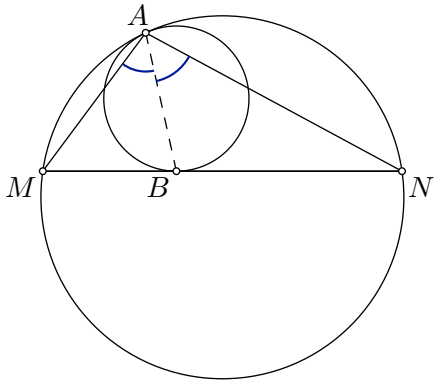
2. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ.

3. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке A. На прямой ℓ выбрана произвольная точка P. Точки C_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB, AC. Докажите, что $BC \perp B_1C_1$.

4. Вписанная окружность касается сторон четырехугольника $ABCD$ в точках P, Q, R, S. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда диагонали четырехугольника $PQRS$ перпендикулярны.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_1 и C_1, соответственно. Точки B' и C' симметричны точкам B_1 и C_1 относительно биссектрис углов B и C, соответственно. Докажите, что $B'C' \parallel BC$.





6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом $\angle A = 90°$. На меньших дугах AB, AC его описанной окружности отмечены точки C_0, B_0, соответственно. Хорды BB_0, CC_0 пересекают стороны AC, AB в точках B_1, C_1, соответственно. Докажите, что окружности (AB_0B_1) и (AC_0C_1) касаются.

7. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B и окружности Ω в точке A. Докажите, что AB — биссектриса угла MAN.

8. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, второй раз пересекающая окружность ω_1 в точке C и пересекающая окружность ω_2 в точке D. Пусть M — точка пересечения касательной к окружности ω_1 в точке C и касательной к окружности ω_2 в точке D. Отрезки AM и CD пересекаются в точке T. На отрезке AC отмечена точка K так, что $TK \parallel CM$. Докажите, что прямая BK касается окружности ω_2.

9. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > AC$. Серпер к стороне BC треугольника ABC пересекает отрезок AB в точке K. Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке S. Докажите, что $SK \parallel BC$.

10. Три окружности γ_a, γ_b и γ_c имеют общую точку X. Касательная к окружности γ_a в точке X повторно пересекает окружности γ_b и γ_c в точках A_b и A_c. Точка M_a — середина отрезка A_bA_c. Точки M_b и M_c определены аналогично. Докажите, что четырёхугольник $M_aM_bM_cX$ — вписанный.