

Вокруг неравенства Ам-Гм

В этом листике мы будем решать алгебраические неравенства: доказывать, что одно алгебраическое выражение больше другого при всех допустимых значениях переменных. Основным оружием в наших руках станет неравенство Ам-Гм между *средним арифметическим* (arithmetic mean) и *средним геометрическим* (geometric mean) двух неотрицательных чисел:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Часто для решения неравенства достаточно один или несколько раз применить неравенство Ам-Гм. При этом иной раз приходится проявлять некоторую изобретательность: применять неравенство не к отдельным переменным, а к выражениям, применять неравенство к частям выражения, удачно выполнять алгебраические преобразования и заменять переменные, группировать и подразбивать слагаемые/множители, добавлять дополнительные слагаемые/множители в оцениваемое выражение. Вот пара примеров для того, чтобы вдохновиться.

Пример 1. Для любых вещественных чисел a, b, c выполнено

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Действительно, подразобьём слагаемые и оценим по неравенству Ам-Гм:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 2ab}) + \frac{1}{2}(\underbrace{b^2 + c^2}_{\geq 2bc}) + \frac{1}{2}(\underbrace{c^2 + a^2}_{\geq 2ca}) \geq ab + bc + ca.$$

Пример 2. Положительные числа a, b, c в произведении дают 1. Тогда

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}.$$

Оценим знаменатели с помощью неравенства Ам-Гм:

$$\sum \frac{2a}{b+c} = \sum \frac{a}{\frac{b+c}{2}} \leq \sum \frac{a}{\sqrt{bc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{abc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{1}} = \sum a\sqrt{a}.$$

При устной сдаче задач все формулы и промежуточные неравенства должны быть **предварительно выписаны**. Допускается устно пояснять логику решения: какие из выписанных строчек из каких и как именно следуют.

1. Любые положительные числа x и y удовлетворяют *неравенству о средних*:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Докажите **(а)** первое; **(б)** третье неравенство.

Приведённые в задаче выше четыре выражения соответственно называются *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел x и y .

2. Для $x \in (0, +\infty)$ найдите минимум выражения **(а)** $x + 1/x$; **(б)** $x^3 + 3/x$.

3. Для любых неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

4. Докажите, что положительные числа x, y, z удовлетворяют неравенству

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x+y+z).$$

5. Докажите, что

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

для любых вещественных чисел a, b, c .

6. Даны положительные числа a, b, c . Докажите, что

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

7. Даны вещественные числа $0 < x, y < 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1-xy}}.$$

8. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют

$$(a+b)^2(a+c)^2 \geq 4abc(a+b+c).$$

9. Для какого наибольшего положительного числа α выполнено неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq \alpha(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5).$$

для всех наборов положительных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ?

10. Даны положительные числа a, b, c , сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}.$$

11. Вещественные числа a, b, c не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$