

Вокруг неравенства Ам-Гм

В этом листике мы будем решать алгебраические неравенства: доказывать, что одно алгебраическое выражения больше другого при всех допустимых значениях переменных. Основным оружием в наших руках станет неравенство Ам-Гм между *средним арифметическим* (arithmetic mean) и *средним геометрическим* (geometric mean) двух неотрицательных чисел:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Доказать это неравенство можно так: выполним замену переменных $x = a^2$, $y = b^2$ и перепишем неравенство между средними преобразуется в виде

$$\sqrt{a^2b^2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2+b^2 \iff 0 \leq a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2.$$

Последнее неравенство справедливо потому, что квадрат любого вещественного числа неотрицателен.

Часто для решения неравенства достаточно один или несколько раз применить неравенство Ам-Гм. При этом иной раз приходится проявлять некоторую изобретательность: применять неравенство не к отдельным переменным, а к выражениям, применять неравенство к частям выражения, удачно выполнять алгебраические преобразования и заменять переменные, группировать и подразбивать слагаемые/множители, добавлять дополнительные слагаемые/множители в оцениваемое выражение. Вот пара примеров для того, чтобы вдохновиться.

Пример 1. Для любых вещественных чисел a, b, c выполнено

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Действительно, подразобьём слагаемые и оценим по неравенству Ам-Гм:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{a^2 + b^2}_{\geq 2ab}) + \frac{1}{2}(\underbrace{b^2 + c^2}_{\geq 2bc}) + \frac{1}{2}(\underbrace{c^2 + a^2}_{\geq 2ca}) \geq ab + bc + ca.$$

Пример 2. Положительные числа a, b, c в произведении дают 1. Тогда

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}.$$

Оценим знаменатели с помощью неравенства Ам-Гм:

$$\sum \frac{2a}{b+c} = \sum \frac{a}{\frac{b+c}{2}} \leq \sum \frac{a}{\sqrt{bc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{abc}} = \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{1}} = \sum a\sqrt{a}.$$

При устной сдаче задач все формулы и промежуточные неравенства должны быть **предварительно выписаны**. Допускается устно пояснять логику решения: какие из выписанных строчек из каких и как именно следуют.

1. Любые положительные числа x и y удовлетворяют *неравенству о средних*:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Докажите (а) первое; (б) третье неравенство.

Приведённые в задаче выше четыре выражения соответственно называются *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел x и y .

2. Для $x \in (0, +\infty)$ найдите минимум выражения (а) $x + 1/x$; (б) $x^3 + 3/x$.

3. Для любых положительных чисел x, y, z докажите, что

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

4. Для любых неотрицательных чисел a, b, c докажите, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

5. Докажите, что положительные числа x, y, z удовлетворяют неравенству

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x+y+z).$$

6. Докажите, что

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

для любых вещественных чисел a, b, c .

7. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

8. Даны положительные числа a, b, c . Докажите, что

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

9. Даны вещественные числа $0 < x, y < 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1-xy}}.$$