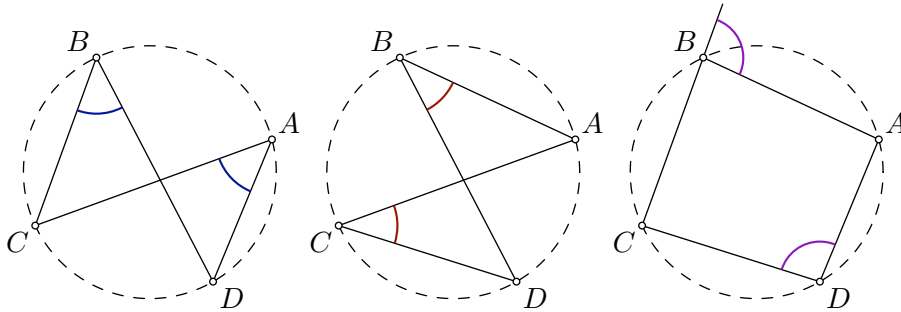


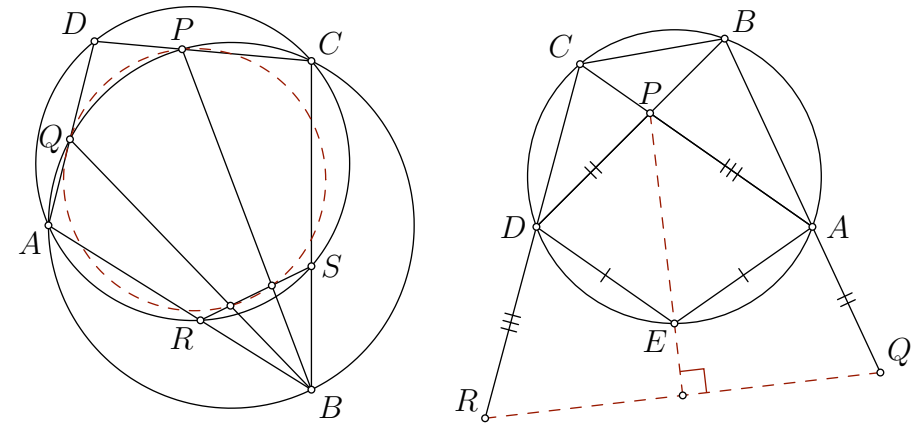
Вписанные четырехугольники

Теорема. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

- (1) $\angle CAD = \angle CBD$; (2) $\angle ABD = \angle ACD$; (3) $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.



1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 лежат на отрезках (можно и на прямых) BC, CA, AB соответственно, то описанные окружности треугольников $A_1BC_1, B_1CA_1, C_1AB_1$ имеют общую точку.
3. Биссектрисы BK, CM треугольника ABC пересекаются в точке I , $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $IK = IM$.
4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, вписанный в окружность с центром в точке O . Окружности, описанные вокруг треугольников ABO и CDO , пересеклись второй раз в точке F . Докажите, что точки A, F, D и точка E пересечения отрезков AC и BD лежат на одной окружности.
5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.



6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны CD и DA в точках P и Q соответственно, а описанная окружность треугольника CDA пересекает стороны AB и BC в точках R и S соответственно. Прямые BP и BQ пересекают отрезок RS в точках M и N . Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.
7. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q , что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R , что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.
8. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.
9. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A . На дуге AB описанной окружности треугольника ABD , не содержащей точки D , выбрана точка P . Луч PA пересекает луч CD в точке Q . Точка O — центр описанной окружности треугольника CPQ . Докажите, что если $O \neq D$, то $OD \perp AD$.