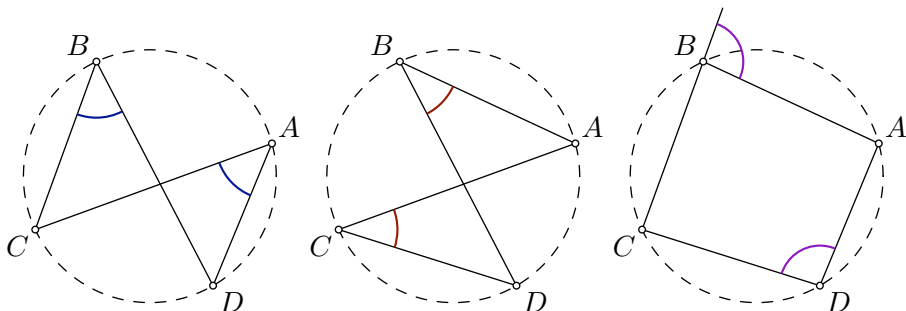


Вписанные четырехугольники

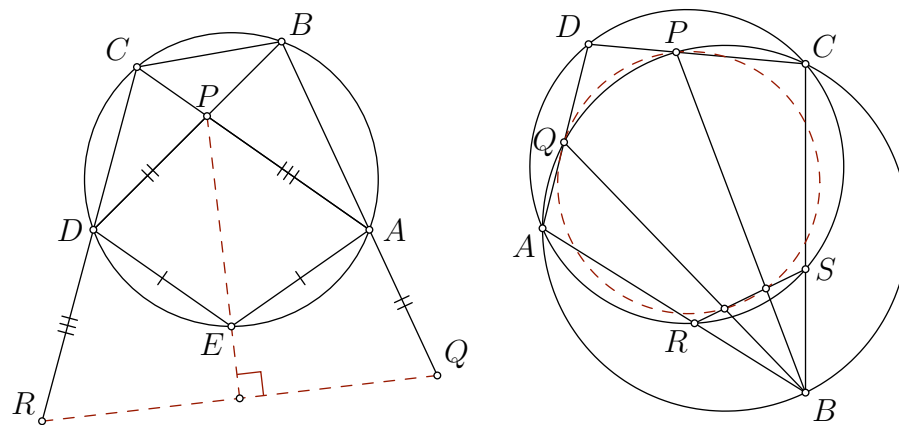
Теорема. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

- (1) $\angle CAD = \angle CBD$; (2) $\angle ABD = \angle ACD$; (3) $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.



1. На диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ отметили K так, что $\angle ABK = \angle ACB$. Прямая BK пересекает отрезок AD в точке X . Докажите, что точки K, X, D, C лежат на одной окружности.
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка K — середина дуги AB , не содержащей точек C и D . Хорды CK и AB пересекаются в точке P , хорды DK и AB — в точке Q . Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
3. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), диагонали которой пересекаются в точке K . Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
4. В треугольнике ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$, биссектрисы BK и CL пересекаются в точке I . Докажите, что $IK = IL$.
5. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC соответственно, то описанные окружности треугольников $A_1BC_1, B_1CA_1, C_1AB_1$ имеют общую точку.
6. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ отмечены точки H, I, O — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника HIO проходит через вершину B .

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Точка O — центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.



8. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q , что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R , что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.
9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны CD и DA в точках P и Q соответственно, а описанная окружность треугольника CDA пересекает стороны AB и BC в точках R и S соответственно. Прямые BP и BQ пересекают отрезок RS в точках M и N . Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.