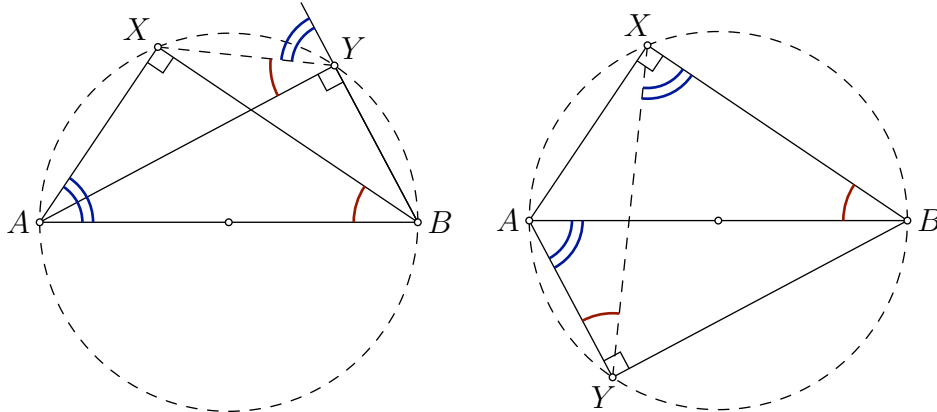


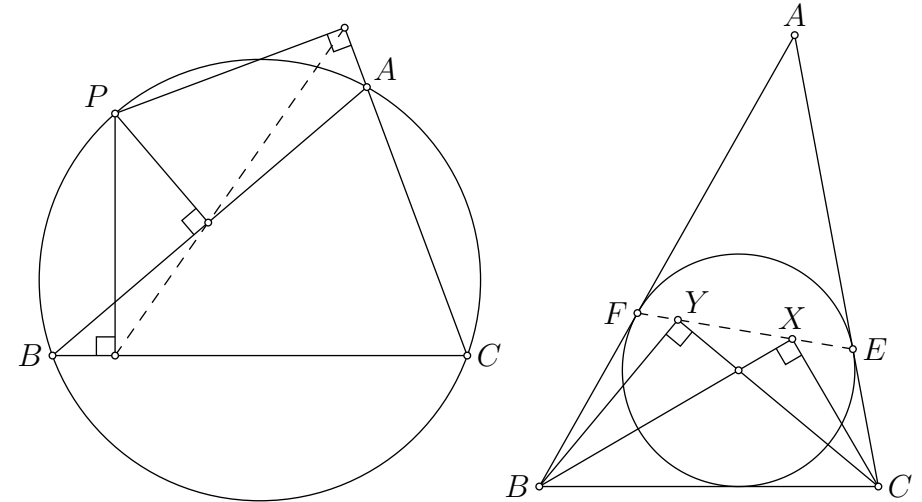
Прямые углы и вписанные четырёхугольники

Предположим, что четыре точки плоскости A, B, X, Y расположены так, что $\angle AXB = \angle AYB = 90^\circ$. Тогда вне зависимости от картинки эти четыре точки лежат на окружности с диаметром AB . Эта вспомогательная окружность позволяет перебрасывать углы, связанные с прямой XY .



- В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE, CF пересекаются в точке H .
(а) Найдите шесть разных вписанных четырёхугольников с вершинами в множестве $\{A, B, C, D, E, F, H\}$.
(б) Докажите, что H — точка пересечения биссектрис треугольника DEF .
- Через вершину A внутри квадрата $ABCD$ проведён луч, из вершины C опущен перпендикуляр CT на этот луч. Докажите, что $\angle ATB = \angle ATD$.
- На высоте AD остроугольного треугольника ABC отмечена точка S . Из точки S опущены перпендикуляры SK, SL на стороны AB, AC соответственно. Докажите, что точки B, C, K, L лежат на одной окружности.
- Докажите, что четыре проекции основания D высоты AD остроугольного треугольника ABC на стороны AB, AC и на высоты BE, CF лежат на одной прямой.
- Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC в точках F, E соответственно. На биссектрисах углов при вершинах B и C отмечены такие точки X и Y , что $\angle BXC = \angle BYC = 90^\circ$. Докажите, что прямая XY проходит через точки E и F . (см. картинку справа сверху)

- (Теорема Симсона) В плоскости треугольника ABC отметили точку P . Докажите, что три проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC . (а) (в одну сторону) Три проекции на прямую, докажите, что P на окружности. (б) (в другую сторону) Точка P лежит на окружности, докажите что 3 проекции лежат на прямой.



- На плоскости даны окружность и точка P вне неё. Через точку P проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и C . Из точки P проведены отрезки PB и PD касательных к окружности. Точка M — середина хорды AC . Докажите, что $\angle BMP = \angle DMP$.
- Докажите, что в любом остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.
- На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$. Обозначим через B', C', P', Q' проекции точек B, C, P, Q на прямые AP, AQ, AQ, AP соответственно. Докажите, что прямые $B'P'$ и $C'Q'$ пересекаются на стороне BC .
- Точка M — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках B и C , пересекаются в точке P . Отрезки AP и BC пересекаются в точке S . Пусть BD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.