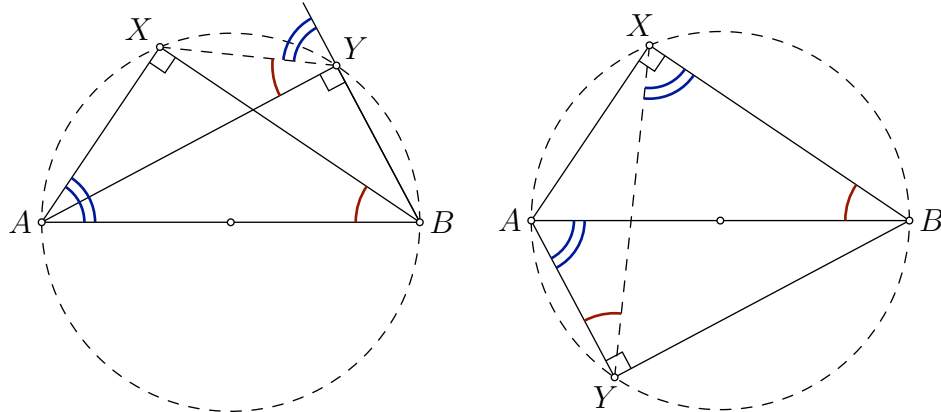


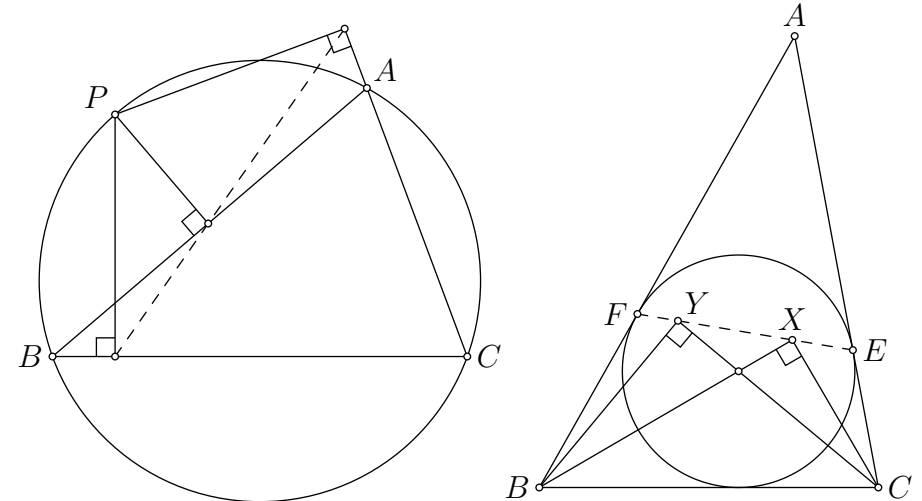
Прямые углы и вписанные четырёхугольники

Предположим, что четыре точки плоскости A, B, X, Y расположены так, что $\angle AXB = \angle AYB = 90^\circ$. Тогда вне зависимости от картинки эти четыре точки лежат на окружности с диаметром AB . Эта вспомогательная окружность позволяет перебрасывать углы, связанные с прямой XY .



- В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE, CF пересекаются в точке H .
(а) Найдите шесть разных вписанных четырёхугольников с вершинами в множестве $\{A, B, C, D, E, F, H\}$.
(б) Докажите, что H — точка пересечения биссектрис треугольника DEF .
- Через вершину A внутри квадрата $ABCD$ проведён луч, из вершины C опущен перпендикуляр CT на этот луч. Докажите, что $\angle ATB = \angle ATD$.
- На высоте AD остроугольного треугольника ABC отмечена точка S . Из точки S опущены перпендикуляры SK, SL на стороны AB, AC соответственно. Докажите, что $\angle ABC = \angle ALK$.
- Внутри угла BAC из вершины A проведены два луча AX и AY так, что $\angle BAX = \angle CAU$. Из точки B опущены перпендикуляры BK и BL на лучи AX и AY . Докажите, что $KL \perp AC$.
- Через точку X внутри окружности проведены три хорды. Докажите, что середины этих трёх хорд и точка X лежат на одной окружности.

- (Теорема Симсона) На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P . Докажите, что три проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой.
- Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC в точках F, E соответственно. На биссектрисах углов при вершинах B и C отмечены такие точки X и Y , что $\angle BXC = \angle BYC = 90^\circ$. Докажите, что прямая XY проходит через точки E и F .



- В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) проведена высота AD и отмечены центр O описанной окружности и середина M стороны BC . Из вершины B опущен перпендикуляр BT на прямую AO . Докажите, что $MT = MD$.
- На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$. Обозначим через B', C', P', Q' проекции точек B, C, P, Q на прямые AP, AQ, AQ, AP соответственно. Докажите, что прямые $B'P'$ и $C'Q'$ пересекаются на стороне BC .