

Рациональное и иррациональное

1. Является ли рациональным число
(а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; (б) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$; (в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$; (г) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$?
2. (а) Докажите, что $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
(б) Определите, для каких натуральных n рационально число

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

- (в) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма и произведение которых рациональны. Как это связано с квадратными уравнениями?
3. Докажите, что из любого бесконечного множества вещественных чисел, содержащего хотя бы одно иррациональное число, можно выбрать 100 элементов, сумма которых иррациональна.
 4. На доске написано 100 различных вещественных чисел. Оказалось, что для любых двух различных чисел a и b на доске значение выражения $a^2 + b\sqrt{2}$ — рациональное число. Докажите, что каждое из чисел на доске имеет вид $r\sqrt{2}$, где $r \in \mathbb{Q}$.
 5. Найдите первые 100 цифр после запятой в десятичной записи числа

$$(10 + \sqrt{101})^{101}.$$

6. Можно ли на координатной плоскости провести окружность так, чтобы на ней лежала ровно одна точка с рациональными координатами?
7. Докажите, что если выражение $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ при некотором вещественном x принимает рациональное значение, то и значение выражения $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ также рационально.
8. Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.

9. *Письменная задача. Нужно прислать в Хеопс до 2026.10.02.*

Юра нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по вещественному числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и столбца. Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?