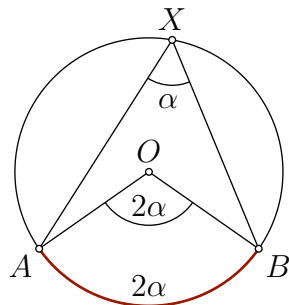


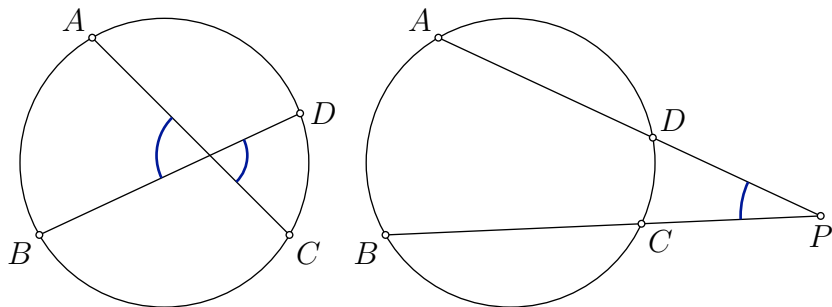
Меры дуг окружности и вписанные углы

Предположим, что на окружности Ω с центром в точке O отмечены точки A, B . Рассмотрим дугу $\widehat{AB}$. Мерой дуги $\widehat{AB}$ назовём величину центрального угла $\angle AOB$ (центральный угол может быть больше 180° ; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки X окружности Ω вне дуги $\widehat{AB}$ угол $\angle AXB$ будет называться *вписанным углом*, опирающимся на дугу $\widehat{AB}$.



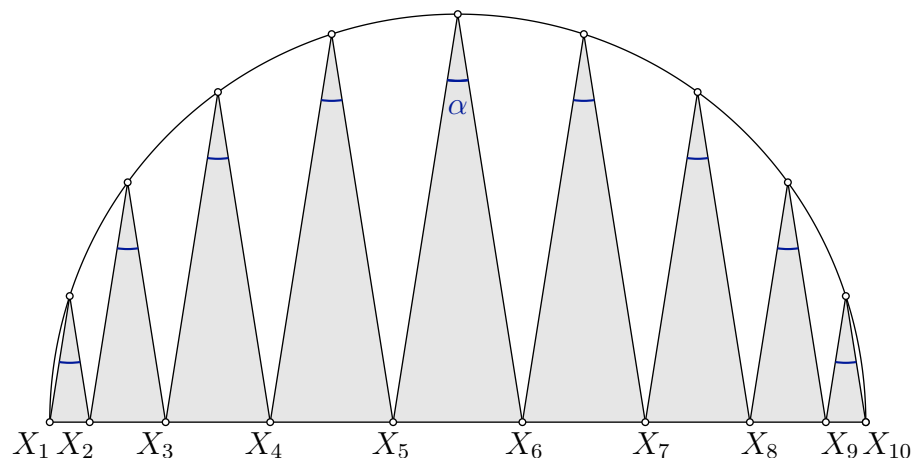
Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

- Точки M и N — середины «меньшей» и «большой» дуг BC описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Докажите, что
 - прямая AM — биссектриса угла BAC ;
 - прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC .
- Докажите, что величина отмеченного угла на первой картинке равна полусумме мер «меньших» дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$.
 - Докажите, что величина отмеченного угла на второй картинке равна полуразности мер «меньших» дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$.



- Вершины четырёхугольника с равными диагоналями лежат на одной окружности. Докажите, что у четырёхугольника есть две параллельные стороны.
- На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D .
 - Пусть K, L, M, N — середины «меньших» дуг $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
 - Лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи BC и AD — в точке Q . Докажите, что биссектрисы углов BPC и DQC перпендикулярны.

- Точка D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC . Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что прямая AD — биссектриса угла PAQ .
- Дан правильный семиугольник $ABCDEFGH$. Прямые BC и EF пересекаются в точке X , прямые CE и AF — в точке Y . Докажите, что $AB \parallel XY$.
- На окружности отмечено 100 различных точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?
- На прямой отмечены точки $X_1, \dots, X_{10}$ (именно в таком порядке). На отрезках $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_9X_{10}$ как на основаниях равнобедренные треугольники с одним и тем же углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10} . Найдите α .



- В треугольнике ABC , в котором $AB < AC$, проведена биссектриса AL . Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу $\widehat{AC}$ описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D . Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что точки D, K и середина «меньшей» дуги $\widehat{BC}$ окружности Ω лежат на одной прямой.
- Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге $\widehat{BC}$ окружности Ω таковы, что $DP \perp EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180^\circ$.