

Комбинаторный разнбой

1. На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).
2. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
3. Числа $1, 2, \dots, 1000$ разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, \dots, k_{500}$ и синие $s_1, \dots, s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n , у которых разность $k_m - s_n$ даёт остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n , у которых разность $s_n - k_m$ даёт остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.
4. Среди 49 школьников каждый знает как минимум 25 других. Докажите, что их можно разбить на группы по 2 или 3 человека так, чтобы каждый школьник знал всех остальных в своей группе.
5. В лагерь приехали 99 школьников, причём все имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу называют популярной, если каждый приехавший вне группы знаком хотя бы с кем-то из группы. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.
6. В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные — в чёрный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10 , все клетки которого белые, и квадрат 10×10 , все клетки которого чёрные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10 , в котором количество чёрных и белых клеток отличается не больше чем на d ?
7. В клубе $n \geq 3$ человек. Каждый принёс некоторое количество своего любимого сока и хочет выпить всё, что принёс. За стол могут садиться любые трое, за один сеанс все трое обязаны выпить одинаковое количество своего сока. Докажите, что выпить весь сок возможно тогда и только тогда, когда количество сока каждого человека не превосходит трети общего количества.
8. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.