

Системы счисления

1. Имеются весы с двумя чашами. Вы можете сделать любой набор из 6 гирь, но так, чтобы масса каждой гири выражалась натуральным числом граммов (массы гирь не обязательно различны).

Гири разрешается класть только на правую чашу весов.

(а) Приведите пример такого набора, с помощью которого на весах можно взвесить любой груз, весящий целое число граммов от 1 до 63.

(б) Существует ли такой набор, с помощью которого на весах можно взвесить любой груз, весящий целое число граммов от 1 до 64?

Теперь гири разрешается класть на обе чаши весов.

(в) Существует ли такой набор, с помощью которого на весах можно взвесить любой груз, весящий целое число граммов от 1 до 365?

(г) Приведите пример такого набора, с помощью которого на весах можно взвесить любой груз, весящий целое число граммов от 1 до 364.

2. В галерее готовят серию выставок с одними и теми же 300 картинами. На каждой выставке картины размещают в двух залах. Куратор хочет, чтобы для любой пары картин нашлась выставка, на которой они оказались в разных залах. За какое наименьшее количество выставок он сможет этого добиться?
3. Зритель запоминает какую-то карту в колоде из 27 карт. Затем фокусник раскладывает колоду по порядку на три стопки: первую карту — в первую стопку, вторую — во вторую, третью — в третью, четвёртую — снова в первую и т. д. Зритель указывает, в какой стопке находится его карта. Фокусник собирает стопки снова в одну колоду, сохраняя порядок карт внутри каждой стопки, так, чтобы указанная стопка оказалась между двумя другими. Эти действия фокусник продлевает трижды, после чего гарантированно угадывает карту зрителя. Как он это делает?
4. В музее хранятся экспонаты, каждому из которых присвоен уникальный номер, являющийся натуральным числом. Для экспоната с номером k вводится условная ценность, равная $2^k + 1$. Ценность коллекции определяется как произведение ценностей всех её экспонатов. Докажите, что разные коллекции экспонатов не могут иметь одинаковую условную ценность.

5. (а) Арсений и Константин играют в игру. Арсений загадывает десять натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. После этого Константин называет набор натуральных чисел $k_1, k_2, \dots, k_{10}$, а Арсений в ответ сообщает значение выражения

$$a_1 k_1 + \dots + a_{10} k_{10}.$$

Как Константин может гарантированно узнать числа, загаданные Арсением, за два вопроса?

- (б) Правила игры несколько поменялись: теперь Арсений загадывает не натуральные, а целые числа, а Константин может узнавать значения любых выражений, составленных из его чисел, чисел Арсения, арифметических действий и скобок. Сможет ли теперь Константин гарантированно узнать числа, загаданные Арсением, за два вопроса?
6. Докажите, что существует такой набор из 121 прямоугольника, что любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 2026, можно составить, используя некоторые прямоугольники этого набора. (В наборе могут быть одинаковые прямоугольники.)
7. На прямой дороге через равные промежутки расположены 99 999 километровых столбов, последовательно пронумерованных всеми целыми числами от 1 до 99 999. Необходимо выбрать среди них несколько столбов для установки камер. Три выбранных столба образуют *запрещённую конфигурацию*, если один из них находится ровно посередине между двумя другими. Существует ли способ выбрать 999 столбов так, чтобы никакие три из них не образовали запрещённую конфигурацию?