

Сравнение по модулю.

Определение. Целые числа a и b *сравнимы по модулю m* , если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- они имеют одинаковые остатки при делении на m
- их разность делится на m

Обозначение. $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \equiv_m b$

Основные свойства сравнимости.

- Если $a \equiv_m b$ и $b \equiv_m c$, то $a \equiv_m c$
- Если $a \equiv_m b$ и $c \equiv_m d$, то $a \pm c \equiv_m b \pm d$
- Если $a \equiv_m b$ и k — целое число, то $ka \equiv_m kb$
- Если $a \equiv_m b$ и $c \equiv_m d$, то $a \cdot c \equiv_m b \cdot d$
- Если $a \equiv_m b$ и n — натуральное число, то $a^n \equiv_m b^n$
- Если $ka \equiv_m kb$ и $\text{НОД}(k, m) = 1$, то $a \equiv_m b$

Пример 1.

Найдите остаток от деления $2023 \cdot 2024 \cdot 2025$ на 2026.

Решение примера 1.

Заметив, что $2023 \equiv_{2026} -3$, так как $2023 - (-3) = 2026 : 2026$, и аналогично $2024 \equiv_{2026} -2$, $2025 \equiv_{2026} -1$, получаем, что:

$$2023 \cdot 2024 \cdot 2025 \equiv_{2026} (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \equiv_{2026} -6 \equiv_{2026} 2020$$

Значит остаток равен 2020.

Пример 2.

Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

Решение примера 2.

Перепишем уравнение в виде: $2^x + 7^y - 19^z = 0$ и рассмотрим его под модулем 3, тогда

$$2^x + 7^y - 19^z \equiv_3 (-1)^x + 1^y - 1^z \equiv_3 (-1)^x$$

Значит при любых натуральных x, y, z выражение $2^x + 7^y - 19^z$ не делится на 3, следовательно не равно 0.

1. Найдите остаток от деления

(а) 6^{2026} на 7 (б) $9^{2027} + 13^{2027}$ на 11

(в) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 2026^5$ на 2027

(г) $11^{2026} + 9^{2026}$ на 101 (д) $33! + \frac{66!}{33!}$ на 67

2. Докажите, что для нечетных k выполнено $8^{2k+1} + 25 \cdot 3^{k+1} : 67$.

3. Фродо перемножил тысячу первых простых чисел, а затем то ли увеличил, то ли уменьшил полученное число на 1. Мог ли Фродо получить точный квадрат?

4. При каких n число $18^n + 10^n - 7^n - 1$ делится на 187?

5. Докажите, что для каждого натурального n число $11 \cdot 14^n + 1$ — составное.

6. Решите в натуральных числах уравнение:

$$x^4 + y^4 + z^4 - x^2 y^2 - y^2 z^2 - x^2 z^2 = 2027$$

7. Даны простое число p и три различных натуральных числа a, b и c таких, что $ab + 3, bc + 3, ac + 3$ и $abc + 11$ делятся на p . Чему может быть равно p ?

8. Решите в натуральных числах $n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m$.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a^{12} + b^{12}$ и $a^{125} + b^{125}$ делятся на 101. Докажите, что $a^{2020} + b^{2020}$ делится на 101.

10. $(4a^2 - 1)^2 : 4ab - 1$. Докажите, что $(a - b)^2 : 4ab - 1$.