

Зацикливания

1. В здании, в котором проводится кружок, преподаватели повесили на дверь каждой аудитории табличку вида: «Занятия переносятся в аудиторию номер ... » и ушли. Ребёнок пришёл на кружок и ходит между аудиториями в соответствии с табличками. Докажите, что: **(а)** через какое-то время ребёнок начнёт ходить по одному и тому же маршруту **(б)** если все таблички разные, ребёнок вернётся к аудитории, в которой кружок планировался изначально.
2. В последовательности цифр 2, 6, 0, 9, 7, 2, 8, 6, 3, ... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырёх предыдущих. Встретятся ли где-то в этой последовательности:
(а) ещё раз цифры 2, 6, 0, 9 идущие подряд?
(б) цифры 1, 1, 1, 1, идущие подряд?
(в) цифры 2, 1, 1, 2, идущие подряд?
3. 100 камней разложены по нескольким кучкам, слева направо. Каждую минуту справа от ряда формируют новую кучку по правилам: если в самой левой кучке больше одного камня, один из них переносят направо; если же слева кучка из одного камня, то этот камень и следующую за ним кучку объединяют и переносят направо. Изначально все камни лежали в одной кучке. Докажите, что через несколько минут они снова окажутся в одной кучке.
4. На окружности отметили 2026 точек. Фишка стоит на одной из них. Каждым ходом её сдвигают по часовой стрелке: сначала на 1 позицию, потом на 3 позиции, на 5, 7 и т.д. Докажите, что начиная с какого-то момента последовательность положений фишки начнёт повторяться.
5. Робот находится на бесконечной плоскости, и у него есть стопка из 9-ти карточек с инструкциями. На каждом шаге робот: перемещается на 1 метр вперёд; если на верхней карточке написано НАПРАВО или НАЛЕВО, поворачивается на 90° в соответствующую сторону (остальные инструкции игнорирует); перемещает верхнюю карточку вниз стопки. Может ли робот через какое-то время добраться до точки, куда бы попал, если бы сразу переместился на 100 метров вперёд и на 100 метров вправо?

На другой стороне листика ещё задачи.

6. Этаж дворца состоит из большого числа комнат разной формы, соединённых дверьми. Король, отправляясь на прогулку, открыл на этаже все двери, закрыл сам этаж и запустил робот-пылесос.

(а) Робот, прокладывая маршрут между комнатами, в каждой комнате поворачивает налево — после уборки комнаты он выезжает в дверь, следующую по часовой стрелке за той, через которую он заехал (если смотреть на комнату сверху). Докажите, что робот вернётся в комнату, из которой начал уборку.

(б) После того, как роботу обновили прошивку, он начал чередовать повороты, путешествуя по комнатам: первый раз поворачивает налево, следующие два раза — направо, потом опять один раз налево, два раза направо и т.д. Докажите, что робот всё равно вернётся в исходную комнату.

7. В какой-то день на доске в школе написали 3 числа: 26, 9 и 2026. Каждый вечер во время обхода охранник ищет на доске число, кратное трём. Если он находит число $3k$, то заменяет его на k , а к двум остальным добавляет по k . (Например, после первого обхода на доске будут числа 29, 3 и 2029.) Докажите, что в какой-то из дней на доске будет записано число 2000.
8. Замок выглядит сверху как правильный треугольник, разбитый на 25 одинаковых треугольных комнат. Между любыми комнатами с общей стороной есть дверь. В одном углу замка живёт дракон, а в другой угол пробрался рыцарь. На полу каждой комнаты нарисована стрелка, указывающая на дверь, через которую рыцарь может выйти из комнаты. После того, как рыцарь покидает комнату стрелка поворачивается к следующей по часовой стрелке двери. Можно ли расставить стрелки в комнатах так, чтобы рыцарь никогда не добрался до дракона?