

Очная диагностическая работа

Задача 1. В компании 18 человек, причём каждый из них знаком не менее, чем с 12 из остальных. Верно ли, что любые трое имеют общего знакомого среди остальных?

Задача 2. Саша изучил, какие числа можно получить, если зачеркнуть в натуральном числе N одну цифру, и обнаружил, что какие-то два из них отличаются на 2027. Затем он изучил, какие числа можно получить, если зачеркнуть одну цифру в числе $N + 20$. Могут ли какие-то два из них отличаться на 202?

Задача 3. Маша красит в чёрный некоторые клетки белого клетчатого квадрата 13×13 . Она хочет, чтобы в любых двух соседних столбцах было не больше k чёрных клеток, а в любых двух соседних строках — не менее $k + 1$ чёрной клетки. Для какого наименьшего k Маше удастся это сделать?

Задача 4. Даша поставила кубик со стороной 1 на какую-то клетку белой доски 100×100 . На каждой грани куба нарисована стрелочка, указывающая вверх, влево, вниз или вправо. Каждую минуту Даша смотрит на кубик сверху и перекатывает его в направлении стрелки. Известно, что кубик никогда не упадёт с доски. Алла следит за движениями кубика, и каждый раз, когда он покидает очередную клетку, красит её в красный цвет. Докажите, что на доске никогда не появится красный квадрат 5×5 .

Задача 5. Арсений написал на доске в ряд сто целых чисел. За один ход Костя выбирает несколько стоящих подряд чисел, а Арсений либо вычитает из всех них единицу, либо прибавляет к ним всем единицу. Докажите, что Костя может действовать так, что через несколько ходов на доске окажется хотя бы 98 чисел, делящихся на 4.

Задача 6. Три натуральных числа $a < b < c$ таковы, что $b - a = c - b$. Известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = b \cdot (b - a)^2.$$

Найдите все возможные значения c .