Дискретная непрерывность

Идея 1. Пусть некая величина D в некотором процессе изменяется так, что:

(0) D принимает только целые значения;

(1) в начале процесса $D = a$;

(2) в конце процесса $D = b$;

(3) за каждый ход D меняется не более чем на 1.

Тогда в ходе процесса величина D принимает все целые значения с отрезка $[a; b]$ хотя бы по одному разу.

Пример 1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары – чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

Идея 2. Если процесса не видно — организуй процесс сам!

Пример 2. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 8 простых?

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2. **(а)** На плоскости отмечены 100 точек, причём никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести такую прямую, что по обе стороны от неё будет поровну отмеченных точек.

(б) На плоскости отмечены 100 чёрных точек и 1 красная точка, причём никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Докажите, что через красную точку можно провести такую прямую, что по обе стороны от неё будет поровну чёрных точек.

(в) На плоскости отмечены 100 точек, причём никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Экватором будем называть прямую, проходящую через две отмеченные точки, такую, что по обе стороны от неё отмеченных точек поровну. Каково наименьшее возможное количество экваторов?

3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу прибавляется любая из его ненулевых цифр. Докажите, что в некоторый момент на доске будет написано четное число.

4. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Они сели в ряд в некотором порядке.

(а) Всегда ли из этого ряда можно выбрать 10 сидящих подряд школьников, среди которых мальчиков и девочек поровну?

(б) Всегда ли из этого ряда можно выбрать 12 сидящих подряд школьников, среди которых мальчиков и девочек поровну?

(в) Теперь они сели по кругу. Всегда ли из этого круга можно выбрать 12 сидящих подряд школьников, среди которых мальчиков и девочек поровну?

5. В некоторых клетках доски 100×100 стоят шашки — всего 100 штук. Докажите, что доску можно разрезать на две равные части, в которых будет поровну шашек.

6. В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.

7. Грани восьми кубиков $1 \times 1 \times 1$ раскрашены в чёрный и белый цвета так, что суммарно чёрных граней столько же, сколько белых. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$ так, чтобы на поверхности этого куба чёрных и белых квадратиков 1×1 было поровну.

8. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых – фальшивые (но какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Докажите, что рыцарь гарантированно сможет освободиться не позже, чем на двадцать пятый день.

9. Круг разрезан на $2n$ равных секторов, все секторы раскрашены в некотором порядке в два цвета. Получилось n красных секторов и n синих. Все красные секторы пронумерованы числами от 1 до n по часовой стрелке. Все синие секторы пронумерованы числами от 1 до n против часовой стрелки. Докажите, что можно выделить полукруг, в котором все числа от 1 до n встречаются ровно по одному разу.