Формулы сокращенного умножения

Надо знать:

- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$;
- $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$;
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;
- $ab \pm a \pm b + 1 = (a \pm 1)(b \pm 1)$;
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

1. Известно, что $x^2 - 4x = y^2 - 4y$, $x \neq y$. Найдите $x + y$.

2. Что надо написать в скобочках, чтобы получилась верная формула? (Эти формулы тоже надо знать.)
(а) $x^n - y^n = (x - y)(\ldots)$;
(б) $x^n + y^n = (x + y)(\ldots)$, где n — нечётное.

3. Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

4. Неотрицательные вещественные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = yz, \\ y^2 - z^2 = xy. \end{cases}$$

Докажите, что $xyz = 0$.

5. Попарно различные a, b, c таковы, что $a^3 - 3a = b^3 - 3b = c^3 - 3c$. Найдите: **(а)** $a^2 + ab + b^2$; **(б)** $a + b + c$; **(в)** $a^2 + b^2 + c^2$.

6. **(а)** Докажите, что если число $a^n - 1$ простое (a, n – натуральные, $n > 1$), то $a = 2$ и n — простое.
(б) Докажите, что если число $a^n + 1$ простое (a, n – натуральные, $a > 1$), то $a \vdots 2$ и $n = 2^k$.

7. Числа a, b, c удовлетворяют равенству $4(a^2b + b^2c + c^2a) = 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 7abc$. Докажите, что одно из чисел вдвое больше другого.

8. Разложите на множители:
(а) $x^4 + 4$;
(б) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;
(в) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2$.

9. По окружности расставлены 9 натуральных чисел a, b, c, …, i. Все числа $a + b^c$, $b + c^d$, … — простые. Какое наибольшее количество разных чисел среди a, b, … может быть?