Разложение на простые множители

Основная теорема арифметики: каждое натуральное число $n > 1$ в единственном с точностью до перестановки сомножителей виде раскладывается в произведение простых множителей $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. α_i называют степенью вхождения простого числа p_i в число n.

1. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

2. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что abc, bcd, cda — точные кубы натуральных чисел. Докажите, что dab — тоже точный куб.

4. На доске выписаны числа $1, 2, ..., 100$. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди не стёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

5. Докажите, что в вершинах куба можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединенных ребром, стоят числа не взаимно простые (имеющие общий простой делитель), а в каждых двух вершинах, не соединенных ребром, — взаимно простые.

6. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N делится на M. Докажите, что если теперь N разложить на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N.

7. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2026, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

8. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2026 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?