Графы

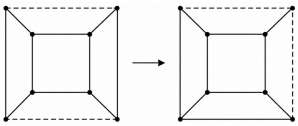
1. В классе 30 учеников, у каждого ученика ровно 3 друга (дружба взаимна). 7 учеников создали секретный чат. После этого если хотя бы два друга ученика оказались в секретном чате, то они добавляют этого ученика в секретный чат. Докажите, что кто-то из учеников этого класса никогда не окажется в секретном чате.

2. Можно ли расставить 6767 коней на доске 2026×2026 так, чтобы каждый бил ровно четырех других?

3. В некотором университете каждые два компьютера соединены кабелем одного из двух видов. Докажите, что можно оставить только один вид кабелей так, чтобы с каждого компьютера по-прежнему можно было передать файл на любой другой (возможно, через другие компьютеры).

4. В Тридевятом царстве 25 городов и сёл. Из столицы выходит 13 дорог, из Дальнего одна дорога, а из всех остальных населённых пунктов по 6 дорог. Докажите, что из Дальнего по дорогам можно добраться в столицу.

5. Каждое ребро изображенного на рисунке графа покрашено в красный (изображен пунктиром) или синий (изображен сплошной линией) цвет. За одну операцию можно выбрать вершину и поменять цвета всех выходящих из неё рёбер. Можно ли такими операциями из левой раскраски получить правую?



6. 40 учеников кружка иногда играют друг с другом в крестики-нолики вместо того, чтобы решать задачи. Во вторник каждый из них сыграл по одной игре. В субботу каждый из них тоже сыграл по одной игре. Докажите, что можно выбрать из них 20 учеников так, что никакие два из них не играли друг с другом.

7. В графе степень каждой вершина равна 6, и любые 2 вершины имеют ровно 2 общих соседа.
(а) Сколько вершин в этом графе?
(б) Приведите пример такого графа.

8. Дан граф на $4 \cdot 10^6$ вершинах. Известно, что среди любых 2000 его вершин найдётся треугольник. Докажите, что в графе найдётся клика (подграф, любые две вершины которого соединены ребром) из 4 вершин.