Очная диагностическая работа

Задача 1. Верно ли, что для любого натурального n найдутся такие натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n?$$

Задача 2. У Стива есть 8104 медных слитка, 6078 железных слитков, 4052 золотых слитка и 2026 незеритовых слитков. За одну сделку с деревенским жителем он может взять два слитка из разных металлов и превратить их в два слитка из двух других металлов (например, вместо медного и железного слитка получить золотой и незеритовый). Какое наибольшее количество незеритовых слитков сможет получить Стив?

Задача 3. Алла, Борис и Ваня играют в игру на доске 2026×2026. В начале игры в каждой клетке записано число 2026. Затем Алла, Борис и Ваня ходят по очереди, повторяя этот порядок. На каждом ходу игрок выбирает любую строку или столбец и вычитает 1 из каждого числа в этой строке или столбце. Ход запрещено делать, если после него в какой-то клетке появится отрицательное число. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Определите, у каких игроков есть стратегия, позволяющая им не проиграть.

Задача 4. Найдите все неотрицательные действительные числа x, y, z, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} x^3 + y^2 z = zx, \\ y^3 + z^2 x = xy, \\ z^3 + x^2 y = yz. \end{cases}$$

Задача 5. Каждая клетка таблицы 2026×2026 раскрашена в один из k цветов, причём каждый цвет используется хотя бы один раз. Два различных цвета A и B называются соседними, если существует клетка цвета A, имеющая общую сторону с клеткой цвета B. Таблица раскрашена таким образом, что каждый цвет граничит не более чем с 2 другими цветами. Каково максимальное возможное значение k?

Задача 6. На карточках выписаны числа $1, 2, \ldots, p-1$, где p — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на p?