Очная диагностическая работа. Решения

Задача 1. Верно ли, что для любого натурального n найдутся такие натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n?$$

Ответ: Верно.

Решение. Положим

$$x_1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = \cdots = x_n = 1$$

Тогда

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) \cdot 2 = n(n+1) + 2.$$

С другой стороны,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right) + 4 + (3 + 4 + \cdots + n).$$

Так как $3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 3$, то сумма равна

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + 4 + \frac{n(n+1)}{2} - 3 = n(n+1) + 2.$$

Произведение и сумма совпали. □

Задача 2. У Стива есть 8104 медных слитка, 6078 железных слитков, 4052 золотых слитка и 2026 незеритовых слитков. За одну сделку с деревенским жителем он может взять два слитка из разных металлов и превратить их в два слитка из двух других металлов (например, вместо медного и железного слитка получить золотой и незеритовый). Какое наибольшее количество незеритовых слитков сможет получить Стив?

Ответ: 20258.

Решение. **Оценка.** Общее число слитков не меняется:

$$8104 + 6078 + 4052 + 2026 = 20260.$$

За одну сделку два разных металла заменяются на два других. Поэтому после любой сделки все четыре количества имеют одинаковую чётность (каждая операция меняет чётность всех четырёх чисел).

Изначально все числа чётны. Значит, в любой момент все четыре числа либо все чётны, либо все нечётны. Если незеритовых N, то остальные три металла вместе дают $20260 - N$.

Если все числа чётны, то сумма трёх «незезеритовых» металлов не может быть меньше 2 (иначе все три были бы нулями, что невозможно, так как после любой сделки хотя бы два металла положительны). Значит, $N \leqslant 20260 - 2 = 20258$.

Если все числа нечётны, то каждый из трёх других металлов не меньше 1, поэтому $N \leqslant 20260 - 3 = 20257$. Значит, больше 20258 получить нельзя.

Пример. Покажем, что 20258 достижимо. Сначала сделаем 6078 сделок: медь + железо $\to$ золото + незерит. Получим

$$(2026, 0, 10130, 8104).$$

Затем 2026 раз: медь + золото $\to$ железо + незерит. Получим

$$(0, 2026, 8104, 10130).$$

Далее 2026 раз: железо + золото $\to$ медь + незерит:

$$(2026, 0, 6078, 12156).$$

Повторяя пары операций, придём к состоянию

$$(0, 2026, 0, 18234).$$

Теперь используем цикл из четырёх операций:

$$\begin{aligned}(0, k, 0, D) &\to (1, k-1, 1, D-1)\\ &\to (0, k-2, 2, D)\\ &\to (1, k-3, 1, D+1)\\ &\to (0, k-2, 0, D+2).\end{aligned}$$

Он уменьшает k на 2, увеличивая D на 2.

Повторим его 1012 раз. Тогда $k = 2026$ уменьшится до 2, а $D = 18234$ увеличится до

$$18234 + 2 \cdot 1012 = 20258.$$

Мы получили 20258 незеритовых слитков.

□

Задача 3. Алла, Борис и Ваня играют в игру на доске 2026×2026. В начале игры в каждой клетке записано число 2026. Затем Алла, Борис и Ваня ходят по очереди, повторяя этот порядок. На каждом ходу игрок выбирает любую строку или столбец и вычитает 1 из каждого числа в этой строке или столбце. Ход запрещено делать, если после него в какой-то клетке появится отрицательное число. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Определите, у каких игроков есть стратегия, позволяющая им не проиграть.

Ответ: у Аллы и Вани.

Решение. Докажем, что Борис проиграет, каким бы образом не шла игра.

Пусть в какой-то момент один из игроков не может сделать ход. Пусть столбец, который выбирали максимальное число раз, это $i-$ый по счёту столбец и его выбирали R раз, а строка, которую выбирали максимальное число раз, это $j-$ая по счёту строка и выбирали её C раз. Рассмотрим произвольную строку. Её больше нельзя выбрать — значит где-то в ней есть число 0. Пусть это клетка на пересечении i_0-го столбца, который выбрали R_0 раз и j_0-ой строки, которую выбрали C_0 раз. Тогда $R_0 + C_0 = 2026$. С другой стороны, $R_0 + C_0 \leqslant R + C \leqslant 2026$, так как число на пересечении $i-$го столбца и $j-$ой строки хотя бы 0. Значит все строки выбрали ровно C раз, а все столбцы ровно R раз, причём $C + R = 2026$. То есть все числа на доске равны 0. Значит ходов было сделано ровно $\frac{2026^2 \cdot 2026}{2026} = 2026^2$. Но так как это число даёт остаток 1 при делении на 3, то сейчас ход Бориса. □

Задача 4. Найдите все неотрицательные действительные числа x, y, z, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} x^3 + y^2 z = zx, \\ y^3 + z^2 x = xy, \\ z^3 + x^2 y = yz. \end{cases}$$

Ответ:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ или } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Решение. Сначала заметим, что если хотя бы одна из переменных равна нулю, то из системы следует, что $x = y = z = 0$. Поэтому далее считаем, что $x, y, z > 0$.

Тогда разделим первое равенство на xz, второе — на xy, а третье — на yz. Получим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} = 1, \\ \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} = 1, \\ \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} = 1. \end{cases}$$

Сравнивая эти равенства, находим:

$$\frac{x^2}{z} = \frac{y^2}{x} = \frac{z^2}{y} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z = 2x^2, \\ x = 2y^2, \\ y = 2z^2. \end{cases}$$

Подставляя последовательно, получаем

$$x = 2(2z^2)^2 = 8z^4,$$

откуда

$$z = 2x^2 = 2(8z^4)^2 = 128z^8.$$

Так как $z > 0$, то $z^7 = \frac{1}{128}$, поэтому $z = \frac{1}{2}$. Аналогично получаем, что $x = y = \frac{1}{2}$. □

Задача 5. Каждая клетка таблицы 2026×2026 раскрашена в один из k цветов, причём каждый цвет используется хотя бы один раз. Два различных цвета A и B называются соседними, если существует клетка цвета A, имеющая общую сторону с клеткой цвета B. Таблица раскрашена таким образом, что каждый цвет граничит не более чем с 2 другими цветами. Каково максимальное возможное значение k?

Ответ: 4051.

Решение. **Пример.** Покрасим квадрат в диагональную раскраску в 4051 цвет.

Оценка. Рассмотрим вспомогательный граф: его вершины — это использованные цвета, а две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие цвета являются соседними.

По условию степень каждой вершины этого графа не превосходит 2. Кроме того, граф связен: действительно, между любыми двумя клетками таблицы можно пройти по соседним клеткам, и при переходе между клетками разных цветов мы каждый раз переходим между соседними вершинами графа.

Следовательно, наш граф представляет собой путь или цикл.

1. Случай, когда граф является путём.

Пронумеруем его вершины числами $1, 2, \ldots, k$ в порядке следования вдоль пути.

Тогда при переходе между соседними клетками таблицы номер цвета либо не меняется, либо меняется на 1. Поэтому номера цветов в любых двух клетках отличаются не более чем на расстояние между этими клетками.

Максимальное расстояние между двумя клетками таблицы равно $2 \cdot (2026 - 1)$. Значит,

$$k - 1 \leq 4050,$$

откуда

$$k \leq 4051.$$

2. Случай, когда граф является циклом.

Рассмотрим центральный квадрат 2×2 таблицы.

Если все четыре клетки этого квадрата имеют разные цвета, то они образуют цикл длины 4 в нашем графе. Поскольку степень каждой вершины не превосходит 2, а граф связен, других вершин в нём быть не может. Следовательно, длина цикла равна 4, и оценка очевидна.

Поэтому можем считать, что в центральном квадрате найдутся две клетки одного цвета. Обозначим этот цвет через C.

Заметим, что от любой клетки таблицы до одной из этих двух клеток можно добраться не более чем за 2025 переходов по сторонам клеток. Действительно, расстояние от любой клетки до центрального квадрата не превосходит 2024, а среди любых двух различных клеток центрального квадрата хотя бы одна находится от неё на расстоянии не более чем на 1 больше минимального.

При переходе между соседними клетками цвет либо не меняется, либо переходит в соседний в нашем графе. Поэтому расстояние от цвета любой клетки до цвета C в графе не превосходит 2025.

Но наш граф является циклом, а значит максимальное количество вершин в нём равно $2 \cdot 2025 + 1 = 4051$. □

Задача 6. На карточках выписаны числа $1, 2, \ldots, p-1$, где p — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько карточек так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на p?

Ответ: $\dfrac{2^{p-1} + p - 1}{p}$.

Решение. Давайте для начала решим такую задачу: найдите количество наборов различных остатков при делении на p, сумма в которых делится на p. Далее в тексте мы работаем со всеми числами по модулю p.

Давайте рассмотрим наборы остатков

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}, \{r_1+1, r_2+1, \ldots, r_k+1\}, \{r_1+2, r_2+2, \ldots, r_k+2\}, \ldots,$$

$$\ldots, \{r_1+(p-1), r_2+(p-1), \ldots, r_k+(p-1)\},$$

то есть в одном наборе остатков сначала прибавим ко всем остаткам 1, потом 2, и так далее до $p-1$ (прибавляя p мы перейдём в исходный набор остатков). Предположим, что два каких-то из этих наборов совпали. Пусть, не умоляя общности, это наборы $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ и $\{r_1+a, r_2+a, \ldots, r_k+a\}$. Тогда если мы возьмём число r_1 и прибавим к нему a, то мы окажемся снова в первом наборе. Значит все числа вида r_1+ta лежат в первом наборе. Но, как известно, при a не кратном p (а у нас именно такое a), числа такого вида принимают все возможные остатки при делении на p. Значит два каких-то множества могли совпасть только если $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ это множество из всех остатков по модулю p.

Теперь посмотрим на сумму остатков в первой группе (опять же по модулю p), пусть она равна S. Тогда в следующих группах суммы остатков равны $S+k, S+2k, S+3k, \ldots$. Опять же, если $k \neq p$, то среди этих чисел есть все остатки при делении на p, то есть ровно в одном таком наборе сумма остатков делится на p.

Итого. Всего наборов остатков 2^p (каждый остаток можно взять или не взять). Все из них, кроме пустого набора и набора из всех остатков, разбиваются на группы по p наборов, где ровно в одном наборе сумма кратна p. Итого всего подходящих наборов будет

$$\frac{2^p-2}{p}+2=\frac{2^p+2p-2}{p}.$$

$+2$ берётся так как в двух наборах, которые не разбились на группы, сумма чисел кратна p (будем считать что, сумма элементов пустого набора равна 0).

Теперь вернёмся к исходной задаче. Заметим, что эти две задачи отличаются только наличием карточки с числом 0. Но понятно, что добавление или убирание такой карточки из набора не меняет сумму. Значит на нашу задачу ответ в два раза меньше, то есть

$$\frac{2^{p-1}+p-1}{p}.$$

□