Городские кружки ЦПМ
Осенние сборы, ноябрь 2026, 11 класс
Материалы занятий

Содержание

I Материалы группы 11–1 **3**

1 Алгебра **4**
Поля . . . 5
Конечные поля . . . 7
Уравнение Пелля . . . 9
Добавка Пелльменей . . . 11

2 Геометрия **12**
База . . . 13
Стереометрия без сфер . . . 16
Добавка . . . 17
Стереометрия со сферами . . . 18
Добавка . . . 19
Загибание треугольников . . . 20
Инверсия . . . 22
Стереометрические неравенства . . . 24

3 Комбинаторика **25**
Двусвязные графы . . . 26
Алгебраические идеи в комбинаторике . . . 28
Алгебраические идеи в комбинаторике . . . 29
Фазовое пространство . . . 30
Множества . . . 32
Слова . . . 33

II Материалы группы 11–2 **35**

1 Алгебра **36**
Поля . . . 37
Конечные поля . . . 39
Уравнение Пелля . . . 41

2 Геометрия **43**
База . . . 44

Стереометрия без сфер . . . 47
Добавка . . . 48
Стереометрия со сферами . . . 49
Добавка . . . 51
Загибание треугольников . . . 52
Инверсия . . . 54
Стереометрические неравенства . . . 56

3 Комбинаторика **57**
Двусвязные графы . . . 58
Фазовое пространство . . . 60
Множества . . . 62
Слова . . . 63

III Материалы группы 11–3 64

1 Алгебра **65**
Алгебраические числа . . . 66
Разнобой по многочленам над $\mathbb{F}_p$ . . . 68
Уравнение Пелля . . . 69
η $\nu\rho$венстваα . . . 71

2 Геометрия **72**
База . . . 73
Стереометрия без сфер . . . 76
Стереометрия со сферами . . . 77
Добавка . . . 79
Загибание треугольников . . . 80
Инверсия . . . 81
Стереометрические неравенства . . . 82

3 Комбинаторика **83**
Двусвязные графы . . . 84
Фазовое пространство . . . 86
Множества . . . 87
Слова . . . 88
Множества. Добавка . . . 89

IV Тренировочные олимпиады 90
Тренировочная олимпиада, 4 задачи . . . 91
Тренировочная олимпиада, 5 задач . . . 92

Часть I

Материалы группы 11–1

1 Алгебра

Поля

Определение. *Полем* называется множество F с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(F, +)$ — абелева группа;
2. умножение коммутативно и ассоциативно;
3. существует единичный элемент $1 \in F$, причём $1 \neq 0$;
4. для каждого ненулевого элемента $a \in F$ существует обратный элемент $a^{-1} \in F$ такой, что
$$a \cdot a^{-1} = 1;$$
5. для всех $a, b, c \in F$ выполнено
$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc.$$

Определение. Два поля называются *изоморфными*, если между ними существует биекция, сохраняющая сумму и произведение. Эта биекция называется *изоморфизмом*.

Определение. *Числовым полем* будем называть подмножество K комплексных чисел, являющееся полем относительно сложения и умножения.

Определение. Если $K \subset L$ — поля, то L называется *расширением* поля K. Заметим, что L является векторным пространством над K. Размерность такого векторного пространства будем называть *размерностью расширения* L над K и обозначать через $[L : K]$. Если векторное пространство конечномерно, то будем говорить, что расширение *конечно*.

Обозначение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$. Символом $K[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ будем обозначать минимальное по включению числовое поле, включающее K и содержащее все x_i.

Определение. Пусть $K \subset L$ — поля, $\alpha \in L$. Элемент α называется **алгебраическим** над полем K, если существует ненулевой многочлен $P(x)$ с коэффициентами из K такой, что $P(\alpha) = 0$; в противном случае α называется **трансцендентным** над K. Для алгебраического α многочлен $P(x)$ с коэффициентами из K наименьшей степени, удовлетворяющий $P(\alpha) = 0$, называется **минимальным многочленом** α над K. Если все элементы L алгебраические над K, то говорят, что поле L — **алгебраическое расширение** поля K.

1. Ясно, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ есть множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Найдите такое же представление для $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ и вычислите
$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}].$$

2. Пусть α — трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент. Докажите, что поле $\mathbb{Q}[\alpha]$ изоморфно полю рациональных функций над $\mathbb{Q}$.

3. Пусть $K \subset L$ — поля, $\alpha \in L$ — алгебраический элемент над K. Докажите, что минимальный многочлен $P(x)$ элемента α над K неприводим (в кольце многочленов с коэффициентами из K), и что любой многочлен $Q(x)$ с коэффициентами из K, удовлетворяющий $Q(\alpha) = 0$, делится на $P(x)$.

4. Пусть α, β — корни одного и того же неприводимого многочлена степени n над K.
(а) Докажите, что поля $K[\alpha]$ и $K[\beta]$ изоморфны.
(б) Обязательно ли эти поля совпадают?

5. **(а)** Пусть α — корень неприводимого над K многочлена степени n. Докажите, что $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ — базис в пространстве $K[\alpha]$ над K.

(б) Теорема об алгебраичности конечного расширения. Пусть $K \subset L$ и $[L : K] = n$. Докажите, что каждый элемент из L — корень некоторого многочлена степени не выше n с коэффициентами из K.

6. **Лемма о башне.** Пусть $K \subset L \subset M$. Докажите, что расширение M над K конечно тогда и только тогда, когда конечны расширения M над L и L над K, причём

$$[M : K] = [L : K] \cdot [M : L].$$

7. **Теорема.** Пусть $K \subset L$. Тогда элементы L, алгебраические над K, образуют поле.
(а) Докажите теорему непосредственно: для α и β, алгебраических над K, постройте многочлены из $K[x]$, корнями которых являются элементы $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ и $1/\alpha$.
(б) Докажите теорему при помощи леммы о башне.

8. Чему равна размерность расширения

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}] : \mathbb{Q}]?$$

9. Пусть α, β — два корня многочлена $x^3 - 17$. Найдите размерность расширения

$$[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}].$$

10. Докажите, что

$$\sqrt[5]{13} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{11}].$$

11. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Докажите, что

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}] = 2^n.$$

Конечные поля

Определение. Поле $\mathbb{F}$ называется *конечным*, если мощность $|\mathbb{F}|$ его множества — конечна.

Определение. *Характеристикой* поля $\mathbb{F}$ называется наименьшее такое $p \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}}_{p \text{ раз}} = 0$ в $\mathbb{F}$. Если такого натурального числа не существует, то говорят, что характеристика равна 0. Обозначение: $\operatorname{char}\mathbb{F}$.

Определение. *Порядком* элемента $a \neq 0$ в конечном поле $\mathbb{F}$ будем называть такое минимальное натуральное число n, что $a^n = 1_{\mathbb{F}}$. Обозначение: $\operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}$.

1. Докажите, что характеристика конечного поля — простое число.

2. **(а)** Пусть для конечного поля $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$. Докажите, что

$$\mathbb{F}_p = \{\underbrace{1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}}_{n \text{ раз}} \mid n = 1, 2, \ldots, p\}$$

образует подполе в $\mathbb{F}$.
(б) Докажите, что $\mathbb{F}_p$ изоморфно полю $\mathbb{Z}_p$.
(в) Докажите, что $|\mathbb{F}| = p^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

3. Для каждого $a \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ введём обозначение $\langle a\rangle = \{a^i \mid i \in \{1, 2, \ldots, \operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}\}\}$. Элемент $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ называется *примитивным*, если $\langle a\rangle = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
(а) Докажите, что $\operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}$ делит $|\mathbb{F}|-1$ (Как следствие, верна *малая теорема Ферма* $a^{|\mathbb{F}|-1} = 1$).

(б) Докажите, что многочлен $x^d - 1$ имеет ровно d корней над конечным полем F.

(в) Докажите, что есть в точности $\varphi(d)$ элементов конечного поля $\mathbb{F}$, порядок которых равен d. Выведите отсюда, что у конечного поля существует примитивный элемент. [1]

4. Пусть $f(x)$ — неприводимый над $\mathbb{Z}_p$ многочлен степени d. Покажите, что в $\mathbb{Z}_p[x]$ множество классов эквивалентности

$$P(x) \equiv Q(x) \pmod f \Leftrightarrow f(x)|(P(x) - Q(x))$$

является полем с p^d элементами. Далее будем обозначать это поле как $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$.

Комментарий. Про эту конструкцию полезно думать как про расширение поля $\mathbb{Z}_p$ до $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ классом эквивалентности x, причем $f(x)$ это минимальный многочлен для x.

[1] Безумие — это точное повторение одного и того же действия. Раз за разом, в надежде на изменение. (c) Vaas Montenegro

5. **(а)** Дано поле $\mathbb{F}$ мощности p^n. Пусть a — примитивный элемент $\mathbb{F}$, а $f(x)$ — его минимальный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ степени d. Докажите, что $d = n$.

(б) Докажите, что $\mathbb{F}$ изоморфно $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$. Выведите отсюда, что все конечные поля одинаковой мощности изоморфны друг другу.

6. Зафиксируем p. Обозначим через A_d число приведенных неприводимых многочленов степени d с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$. Покажем, что $A_d \neq 0$.

(а) Докажите, что если $d|n$, то $x^{p^n} - x$ делится на неприводимый многочлен $f(x)$ степени d.

(б) Докажите, что если $x^{p^n} - x$ делится на неприводимый многочлен $f(x)$ степени d, то $d|n$.

(в) Докажите, что $p^n = \sum\limits_{d|n} dA_d$.

(г) С помощью метода включений-исключений выразите A_d из прошлой формулы и покажите, что это не ноль.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Для любого простого p и натурального n существует поле мощности p^n, единственное с точностью до изоморфизма. Оно обозначается $\mathbb{F}_{p^n}$ и называется *полем Галуа*.

Уравнение Пелля

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. В этом кольце есть операция *сопряжения*

$$\overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}.$$

Нормой элемента $a + b\sqrt{m}$ назовём

$$N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2 = (a + b\sqrt{m}) \cdot \overline{a + b\sqrt{m}}$$

Замечание. Решить уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1 \iff$ найти все элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ нормы 1.

Определение. Пусть (x_1, y_1) — нетривиальное положительное решение уравнения Пелля с наименьшим x_1. Оно называется *фундаментальным*.

1. **(а)** Докажите, что элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ обратим (то есть существует элемент β того же кольца такой, что $\alpha\beta = 1$) тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$.
(б) Пусть (x, y) — решение уравнения Пелля, $\eta = x + y\sqrt{m}$. Тогда

$$\eta > 1 \iff x > 0, y > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1 \iff x > 0, y < 0.$$

(в) Докажите, что все элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ с нормой 1 имеют вид $\pm(x_1 + y_1\sqrt{m})^k, k \in \mathbb{Z}$.
(г) Докажите, что все решения уравнения Пелля — это пары

$$\pm\left(\frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k + (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k - (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}}\right)$$

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

3. Пифагорова тройка $(3, 4, 5)$ такова, что длины катетов отличаются на 1. Сколько всего пифагоровых троек с этим свойством?

4. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}, x_2 + y_2\sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Оказалось, что $x_1 \equiv x_2 \bmod n$ и $y_1 \equiv y_2 \bmod n$, где $n = |N(x_2 + y_2\sqrt{m})|$. Докажите, что тогда $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

5. Докажите, что если на некоторой гиперболе

$$l_N = \{(x, y) : x^2 - my^2 = N\}$$

лежит бесконечное число целых точек, то уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное решение.

6. *Лемма Минковского.* На координатной плоскости расположена выпуклая фигура площади больше 4, симметричная относительно начала координат. Докажите, что в ней найдётся ещё одна целочисленная точка.

7. Рассмотрим гиперболы с уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$.

(а) Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй. Найдите площадь параллелограмма с вершинами в этих точках. Зависит ли она от x_0 и y_0?

(б) С помощью леммы Минковского докажите, что для какого-то N на гиперболе $x^2 - my^2 = N$ найдётся бесконечно много целых точек.

Замечание. Таким образом, мы доказали, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

Добавка Пелльменей

1. Пусть $l(n)$ — количество простых чисел в разложении числа n с учётом кратности. Докажите, что есть бесконечно много чисел n, для которых
(а) $l(n)$ и $l(n+1)$ оба чётны,
(б) $l(n)$ и $l(n+1)$ оба нечётны.

2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + 2 = 3^n$.

3. Решите уравнение Пелля для многочленов $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$P^2(x) - (x^2 - 1)Q^2(x) = 1.$$

2 Геометрия

База

Важный принцип. В любой задаче надо подумать, есть ли у неё плоский аналог. Если есть, то решение плоского аналога (возможно, как-то адаптированное) можно попробовать перенести в пространство. Естественно, так работает не со всеми решениями. Например, поскольку сумма углов тетраэдра не фиксирована и вписанных углов нет, то большинство решений со счётом углов не переносятся.

Прямые и плоскости

1. Три прямые пересечения трёх плоскостей либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

2. Для двух скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, содержащая эти прямые. Расстояние между прямыми равно расстоянию между этими плоскостями.

3. Если среди нескольких прямых любые две пересекаются, то либо все прямые лежат в одной плоскости, либо все пересекаются в одной точке.

Углы

4. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Пусть ℓ — прямая, не перпендикулярная плоскости α, ℓ' — её ортогональная проекция на α, m — прямая в плоскости α. Тогда $\ell \perp m \Leftrightarrow \ell' \perp m$.

5. Плоскости α и β перпендикулярны тогда и только тогда, когда существует прямая ℓ в α, перпендикулярная β.

6. Угол между прямой и плоскостью — это наименьший из углов, который данная прямая образует с прямыми, лежащими в плоскости.

7. Угол между плоскостями равен углу между нормалями к ним.

Сферы

8. Сфера и плоскость пересекаются по окружности, две сферы — тоже (ну, ещё могут касаться или не иметь общих точек).

9. Проекция центра сферы на секущую плоскость — это центр окружности пересечения. В частности, центр описанной сферы многогранника проецируется в центры описанных окружностей граней. А если проецировать на ребро, то попадём в середину ребра.

10. Есть касательные плоскости и прямые. Каждая касательная прямая лежит в касательной плоскости. Если провести все касательные из точки, то получится конус. У двух сфер, ни одна из которых не лежит внутри другой,

есть общие касательные плоскости. Если касательную плоскость вращать вокруг линии центров, то она будет огибать конус (или цилиндр); в частности, все общие касательные плоскости (внутренние или внешние) пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

Преобразования

11. Есть движения. Параллельный перенос, симметрия относительно плоскости, прямой, точки ведут себя совсем так же. Поворота вокруг точки нет, только вокруг прямой. Есть гомотетия, она тоже аналогична.

Тетраэдр

12. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3:1$. Бимедианы пересекаются в этой же точке и делятся ей пополам.

13. У тетраэдра существуют вписанная и описанная сферы. Из вписанной сферы гомотетией можно получить ещё 4 сферы, которые касаются всех плоскостей граней. Они называются вневписанными сферами.

14. Высоты тетраэдра не всегда пересекаются в одной точке.

15. Сумма двугранных углов тетраэдра не фиксирована.

16. Формулы для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1S_2\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{1}{6}\cdot abd\cdot\sin\varphi.$$

Какие-то факты

17. Геометрическое место точек, равноудалённых от сторон двугранного угла, — это плоскость (биссекторная плоскость); она является плоскостью симметрии двугранного угла. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух точек, — это плоскость (срединная плоскость или серединный перпендикуляр).

18. **Пространственная теорема Менелая.** На прямых, содержащих рёбра замкнутой четырёхзвенной неплоской ломаной $ABCD$, выбраны точки P, Q, R, S соответственно. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}} = 1.$$

19. Даны плоскости, угол между которыми равен φ. Многоугольник площади S, лежащий в одной плоскости, ортогонально спроецировали на другую плоскость, получили многоугольник площади S'. Тогда $S' = S\cos\varphi$.

20. Неравенство треугольника трёхгранного угла. У трёхгранного угла сумма двух плоских углов больше третьего.

21. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Стереометрия без сфер

1. Докажите, что если у тетраэдра пересекаются два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, то также пересекаются отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней.

2. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB_1, AC_1, AD_1 на биссекторные плоскости при ребрах CD, BD, BC. Докажите, что плоскости $B_1C_1D_1$ и BCD параллельны.

3. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

4. Внутренняя биссекторная плоскость при ребре AB тетраэдра $ABCD$ проходит через середину ребра CD. Докажите, что внешняя биссекторная плоскость при ребре AB параллельна прямой CD.

5. Основания трёх высот тетраэдра являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что тетраэдр правильный.

6. Все боковые грани выпуклой n-угольной призмы равны. Для каких n из этого обязательно следует, что призма прямая?

7. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

8. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

9. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар рёбер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел (1, 2, 3, 4) (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, рёбра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре рёбра тоже перпендикулярны.

Добавка

1. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

2. Прямая пересекает три высоты тетраэдра. Докажите, что она пересекает четвертую высоту (или параллельна ей).

3. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M таким образом, что $\angle MAD = \angle MBC$ и $\angle MDB = \angle MCA$. Докажите, что

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD)\,.$$

Стереометрия со сферами

В стереометрии вписанных углов нет, только прямые.

Есть степень точки, она определяется аналогично плоскости. У двух сфер есть радикальная плоскость, у трёх сфер есть радикальная прямая, у четырёх сфер есть радикальный центр (почти всегда).

1. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром O. Плоскость, перпендикулярная OA, пересекает рёбра AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 лежат на одной сфере.

2. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

3. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Все фрукты являются шарами. Докажите, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости.

4. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны.

5. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$ кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра AB.

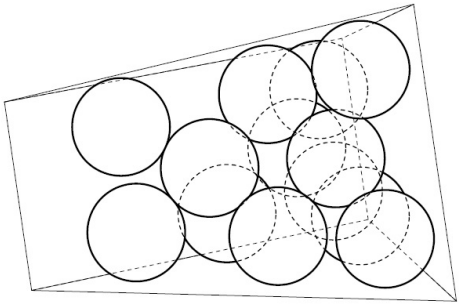
6. Две различные сферы S_1, S_2 проходят через вершины треугольника ABC. Точка M движется по S_1 вне плоскости ABC. Вторые пересечения прямых MA, MB, MC со сферой S_2 обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ либо все касаются одной фиксированной сферы, либо все проходят через одну фиксированную точку.

7. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, а J — центр сферы, касающейся грани BCD и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок IJ пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке K. Что больше: IK или JK?

8. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, точки A', B', C', D' — центры описанных сфер тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что описанная сфера тетраэдра $ABCD$ целиком лежит внутри описанной сферы тетраэдра $A'B'C'D'$.

Добавка

1. Дед Мороз готовит подарок с 13 одинаковыми шарообразными апельсинами, складывая их в коробку, имеющую форму (не обязательно прямой) призмы. В первом слое три апельсина лежат в углах (каждый касается дна и двух боковых граней), ещё три — у сторон (каждый касается дна и своей боковой грани). Во втором слое — три апельсина, каждый касается одного углового и двух соседних боковых апельсинов. Поверх них выкладывается третий слой — три апельсина, каждый касается одного *своего* апельсина из второго слоя и двух соседних боковых граней, и ещё один, касающийся трёх апельсинов из второго слоя (см. рис.). Докажите, что четыре апельсина третьего слоя касаются одной плоскости.



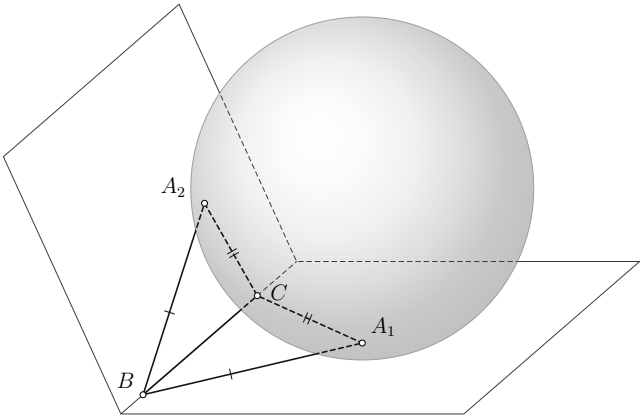
2. Противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны. Тетраэдр вписан в сферу Ω. Точку X, лежащую на Ω, отразили относительно плоскостей граней тетраэдра. Пусть Y — центр сферы, проходящей через четыре полученных точки. Докажите, что Y лежит на Ω.

3. Докажите, что из четырёх центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все четыре лежат на описанной сфере.

4. Докажите, что если два прямоугольных параллелепипеда имеют равные объемы, то их можно расположить в пространстве так, что любая горизонтальная плоскость, пересекающая один из них, будет пересекать и второй, причем по многоугольнику той же площади.

Загибание треугольников

Наблюдение. Сфера, вписанная в двугранный угол, касается граней угла в точках A_1 и A_2. Точки B и C лежат на ребре двугранного угла. Тогда $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$.



1. **(а)** Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается грани BCD в точке A_1. Выразите угол CBA_1 через плоские углы при вершине B.
(б) Вневписанная сфера касается грани BCD в точке A_2. Докажите, что точки A_1 и A_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD. Что будет в случае n-угольной пирамиды?

2. В четырёхугольную пирамиду $SABCD$ можно вписать сферу. Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$. Докажите, что четыре образа точки S лежат на одной окружности.

3. Грани выпуклого многогранника покрашены в белый и чёрный цвета. Оказалось, что никакие две чёрные грани не имеют общего ребра и чёрных граней больше половины. Докажите, что в этот многогранник нельзя вписать сферу.

4. Все грани выпуклого шестигранника — четырёхугольники, а в каждой вершине сходится три ребра. Шестигранник описан около сферы с центром I. Известно, что проекции точки I на рёбра некоторой грани шестигранника лежат на одной окружности. Докажите, что проекции точки I на ребра противоположной грани также лежат на одной окружности.

5. Докажите, что в выпуклый четырёхгранный угол можно вписать сферу тогда и только тогда, когда суммы противоположных плоских углов равны.

6. Выпуклый многогранник $SABCS_1$ составлен из двух тетраэдров $SABC$ и S_1ABC, точки S и S_1 лежат по разные стороны относительно плоскости

ABC. Докажите, что в него можно вписать сферу тогда и только тогда, когда вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и S_1ABC касаются.

Инверсия

В пространстве есть инверсия. При инверсии

- плоскость, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;
- плоскость, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, проходящую через центр инверсии;
- сфера, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, не проходящую через центр инверсии;
- окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.

Если центр инверсии не лежит в плоскости окружности, то окружность и её образ после инверсии лежат на одной сфере.

Среди инверсий, переводящих сферу в плоскость, выделяют *стереографическую проекцию*. Это инверсия с центром в точке O, лежащей на сфере, и радиусом, равным диаметру сферы. У стереографической проекции есть другое описание. Пусть сфера ω касается плоскости α, точка O диаметрально противоположна точке касания. Каждая точка A сферы, отличная от O, переходит в пересечение луча OA с плоскостью α.

Ещё одна полезная мысль: в некоторых стереометрических задачах помогает сведение к конфигурации окружностей на сфере. Далее, применив стереографическую проекцию в какой-нибудь точке сферы, можно получить планиметрическую задачу.

1. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом по циклу. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

2. Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность.

3. В выпуклом шестиграннике все грани — четырехугольники, а семь его вершин лежат на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на этой сфере.

4. Даны три попарно касающиеся сферы ω_1, ω_2, ω_3. Сфера γ_1 касается всех этих трех сфер. Каждая следующая сфера γ_i касается изначальных трех и сферы γ_{i-1}, причём $\gamma_{i-1} \neq \gamma_{i+1}$. Докажите, что $\gamma_1 = \gamma_7$.

5. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A', B', C' соответственно. Точка C_1 — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а точка C_2 — общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA' и C_1BB',

отличная от C_1. Аналогично определяются точки A_1, B_1, A_2 и B_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

6. Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

7. Сфера S касается плоскости. Пусть A, B, C, D — четыре точки этой плоскости такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим точку A' такую, что S касается граней тетраэдра $A'BCD$. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости и плоскость $A'B'C'D'$ касается S.

8. На ребрах тетраэдра произвольным образом выбрали по одной точке. Для каждой из вершин тетраэдра через нее и три выбранные точки, лежащие на выходящих из этой вершины ребрах, провели сферу. Докажите, что получившиеся четыре сферы пересекаются в одной точке.

Стереометрические неравенства

1. Шесть отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?

2. Докажите, что наименьший двугранный угол любого тетраэдра не превосходит двугранного угла правильного тетраэдра.

3. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

4. Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

5. **(а)** Тетраэдр $KLMN$ лежит внутри тетраэдра $ABCD$. Верно ли, что $P_{ABCD} \geqslant P_{KLMN}$ (через P_{ABCD} обозначена сумма длин рёбер тетраэдра $ABCD$)?
(б) Для какого наименьшего α обязательно верно, что $\alpha P_{ABCD} \geqslant P_{KLMN}$?

3 Комбинаторика

Двусвязные графы

Определение. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при её удалении (вместе со всеми выходящими рёбрами) граф теряет связность.

Определение. Связный граф называется *двусвязным*, если в нём больше одной вершины и нет точек сочленения.

1. **(а)** Рёбра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3.

(б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

2. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все его точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, B_2, \ldots, B_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причём все его висячие вершины соответствуют блокам.

4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов. Пусть G — связный граф с блоками $B_1, \ldots, B_n$. Докажите, что

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

5. Дано натуральное число $d > 1$. Про граф G известно, что в нём наибольшее расстояние между вершинами равно d и что для каждой вершины существует удалённая от неё ровно на d другая вершина. Докажите, что в графе есть простой цикл длины не меньше $2d$. (Длина простого пути или простого цикла — это число рёбер в нём.)

6. В двусвязном графе 100 вершин. За одну операцию разрешается выделить простой цикл в графе, добавить новую вершину и соединить каждую из вершин цикла с новой, после чего удалить все рёбра самого цикла. После нескольких таких операций граф превратится в дерево. Какое наименьшее число висячих вершин может быть у получившегося дерева?

7. Дан двусвязный граф G, в котором есть три попарно соединённые друг с другом вершины. Во всех вершинах, кроме одной, стоит по одной фишке (фишки различны), а оставшаяся вершина пустая. За ход разрешается переместить фишку из любой вершины в смежную с ней пустую вершину. Докажите, что такими ходами можно добиться любого наперёд заданного распределения фишек (по одной фишке во всех вершинах, кроме одной).

8. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

9. В стране 100 городов, соединённых друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на две провинции, по 50 городов в каждой, так, что в обеих провинциях из любого города можно проехать в любой другой.

10. Докажите, что из двусвязного графа, степени всех вершин которого хотя бы три, можно так выбросить вершину, чтобы граф остался двусвязным.

Алгебраические идеи в комбинаторике

1. Даны натуральные числа $n > 1$ и $m \geqslant n - 1$. В связном графе n вершин и m рёбер. Сколькими способами можно выделить некоторые рёбра, чтобы из каждой вершины выходило чётное число выделенных рёбер?

2. В таблице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов — столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк — строка с n нулями, n единицами и n двойками.

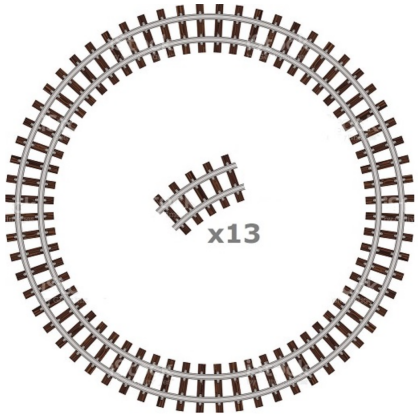
3. Рассмотрим n бесконечных в обе стороны возрастающих арифметических прогрессий, состоящих из целых чисел. Предположим, что прогрессии в объединении покрывают какие-то 2^n последовательных целых чисел. Докажите, что прогрессии в объединении покрывают все целые числа.

Алгебраические идеи в комбинаторике

4. В волшебной стране отбор на IMO состоит из 16 задач. Выяснилось, что каждый кандидат решил ровно половину всех задач и что любые два кандидата в пересечении решили ровно четверть всех задач. Какое наибольшее число кандидатов могло быть?

5. Докажите полного графа на
(а) p вершинах, где p — простое число вида $4k+1$;
(б) q^2 вершинах, где q — простое число вида $4k+3$;
можно раскрасить в красный и синий цвет так, чтобы граф на этих вершинах с красными рёбрами был изоморфен графу на этих же вершинах с синими рёбрами.

6. У Алексея есть игрушечная кольцевая железная дорога, состоящая из 13 одинаковых элементов. Какое минимальное количество таких элементов надо докупить Алексею у дилера, чтобы построить более длинную замкнутую несамопересекающуюся дорогу?



Фазовое пространство

1. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

2. **(а)** В плоскость вбиты n гвоздей общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой. Две прямые плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно непрерывно перетащить в другую, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число прямых можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?
(б) В плоскость вбиты n гвоздей супер-общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Две окружности плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно превратить в другую, непрерывно перемещая центр и непрерывно варьируя радиус, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число окружностей можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?

3. *Горой* назовём график кусочно-линейной непрерывной функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(x) \in (0,1)$ для всех $x \in (0,1)$. *Высотой* точки (x, y) на горе назовём значение y. Даны **(а)** две; **(б)** три горы, по каждой из которых одновременно поднимаются флатландцы из точки $(0,0)$ в точку $(1,1)$. Докажите, что они могут подниматься так, чтобы всё время находиться на одинаковой высоте.

4. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.

5. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

6. **(а)** (*Теорема Пуанкаре о возвращении.*) На плоскости нарисован квадрат ■ размера 1×1. Пусть $f\colon ■ \to ■$ — это биективная функция, сохраняющая площади любых подмножеств квадрата ■. Пусть $A \subset ■$ — фигура поло-

жительной площади. Докажите, что существует точка $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{f(f(\dots f}_{n}(a))) \in A$.

(б) Дан выпуклый многоугольник с рационально кратными π углами. Докажите, что в нём существует периодическая бильярдная траектория.

7. В пироге радиуса R запекли монетку радиуса $r < R$. За какое минимальное число прямолинейных разрезов можно гарантированно задеть ножом монетку? Если разрез касается монетки, то она считается задетой.

Множества

1. Какое наибольшее количество различных трехэлементных подмножеств можно выбрать в множестве из 2026 элементов так, чтобы никакие два не имели в пересечении ровно один элемент?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку.
(а) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.
(б) А может ли быть ровно 50?

3. В множестве, состоящем из 101 элемента, выбрали 2^{51} различных подмножеств. Докажите, что найдутся три таких подмножества, что одно вложено в объединение двух других.

4. Дано $n \geqslant 2$ различных натуральных чисел, для каждой пары выписаны их НОД и НОК. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться?

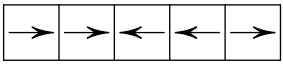
5. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

6. В множестве X выбрано 2026 подмножеств таких, что для любого $1 \leqslant k \leqslant 2025$ пересечение любых k подмножеств имеет четное число элементов, а пересечение всех 2026 подмножеств имеет нечетное число элементов. Какое наименьшее число элементов может быть в множестве X?

7. В множестве X выбраны два семейства 100-элементных подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таких, что для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ верно $A \cap B \neq \emptyset$. Докажите, что все элементы множества X можно покрасить в три цвета так, чтобы никакое множество из $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ не было одноцветным.

Слова

1. В каждой клетке горизонтальной полоски 1×99 нарисована одна стрелка, указывающая влево или вправо. Докажите, что найдётся такая стрелка, на которую указывает столько же стрелок, на сколько других стрелок она сама указывает.



Пример: на рисунке выше подходит стрелка во второй слева клетке.

2. Дана строка из 250 цифр, в которой 125 нулей и 125 единиц. За одну операцию разрешается выделить кусочек из нескольких цифр подряд, среди которых поровну нулей и единиц, и переписать этот кусочек, поменяв порядок символов на противоположный и заменив все нули на единицы и единицы на нули. Вот пример операции:

$$\ldots 1\underbrace{11001001}0\ldots \quad\longrightarrow\quad \ldots 1\underbrace{01101100}0\ldots$$

Докажите, что этими операциями нельзя получить строку такую же, как исходная, но в которой цифры идут в обратном порядке.

3. В алфавите из n букв *словом* называется каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово считается *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $xxyy$, где x и y — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

4. **(а)** Мальчик Коля любит писать на заборах слова из трёх букв: *abc*, *bca*, *cab*. Он может вписать эти три буквы в любое место уже написанного на заборе слова (т. е. в начало, в конец или между любыми двумя буквами). Докажите, что Коля не сможет из пустого слова такими операциями получить непустой палиндром. **(б)** Коля научился писать слова *bac*, *acb*, *cba* и всё-таки смог записать непустой палиндром. Докажите, что он написал слов *abc*, *bca*, *cab* в сумме столько же, сколько слов *bac*, *acb*, *cba*.

5. Рассмотрим слова конечной длины над алфавитом из двух букв α и β. Для слов u и w будем писать $w \leqslant u$, если слово w может быть получено из слова u вычёркиванием нескольких букв (возможно, ни одной). Скажем, что слово w *различает* слова u и v, если $w \leqslant u$ и $w \not\leqslant v$ (или наоборот). Два слова *похожи*, если для них не существует различающего слова длины не более 10. Для какого наименьшего натурального n существуют два различных похожих слова длины n?

6. Дана бесконечная в обе стороны последовательность $\ldots x_{-1}x_0x_1x_2\ldots$ букв a и b. Эта последовательность периодическая, и её минимальный период строго больше, чем 2^n. Назовём конечное непустое слово U *вездесущим*, если все

четыре слова aU, bU, Ua, Ub присутствуют в последовательности как подслова. Докажите, что существуют не меньше n вездесущих слов.

Часть II

Материалы группы 11–2

1 Алгебра

Поля

Определение. *Полем* называется множество F с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(F, +)$ — абелева группа;
2. умножение коммутативно и ассоциативно;
3. существует единичный элемент $1 \in F$, причём $1 \neq 0$;
4. для каждого ненулевого элемента $a \in F$ существует обратный элемент $a^{-1} \in F$ такой, что
$$a \cdot a^{-1} = 1;$$
5. для всех $a, b, c \in F$ выполнено
$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc.$$

Определение. Два поля называются *изоморфными*, если между ними существует биекция, сохраняющая сумму и произведение. Эта биекция называется *изоморфизмом*.

Определение. *Числовым полем* будем называть подмножество K комплексных чисел, являющееся полем относительно сложения и умножения.

Определение. Если $K \subset L$ — поля, то L называется *расширением* поля K. Заметим, что L является векторным пространством над K. Размерность такого векторного пространства будем называть *размерностью расширения* L над K и обозначать через $[L : K]$. Если векторное пространство конечномерно, то будем говорить, что расширение *конечно*.

Обозначение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$. Символом $K[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ будем обозначать минимальное по включению числовое поле, включающее K и содержащее все x_i.

Определение. Пусть $K \subset L$ — поля, $\alpha \in L$. Элемент α называется **алгебраическим** над полем K, если существует ненулевой многочлен $P(x)$ с коэффициентами из K такой, что $P(\alpha) = 0$; в противном случае α называется **трансцендентным** над K. Для алгебраического α многочлен $P(x)$ с коэффициентами из K наименьшей степени, удовлетворяющий $P(\alpha) = 0$, называется **минимальным многочленом** α над K. Если все элементы L алгебраические над K, то говорят, что поле L — **алгебраическое расширение** поля K.

1. Ясно, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ есть множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Найдите такое же представление для $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ и вычислите
$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}].$$

2. Пусть α — трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент. Докажите, что поле $\mathbb{Q}[\alpha]$ изоморфно полю рациональных функций над $\mathbb{Q}$.

3. Пусть $K \subset L$ — поля, $\alpha \in L$ — алгебраический элемент над K. Докажите, что минимальный многочлен $P(x)$ элемента α над K неприводим (в кольце многочленов с коэффициентами из K), и что любой многочлен $Q(x)$ с коэффициентами из K, удовлетворяющий $Q(\alpha) = 0$, делится на $P(x)$.

4. Пусть α, β — корни одного и того же неприводимого многочлена степени n над K.
(а) Докажите, что поля $K[\alpha]$ и $K[\beta]$ изоморфны.
(б) Обязательно ли эти поля совпадают?

5. **(а)** Пусть α — корень неприводимого над K многочлена степени n. Докажите, что $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ — базис в пространстве $K[\alpha]$ над K.

(б) Теорема об алгебраичности конечного расширения. Пусть $K \subset L$ и $[L : K] = n$. Докажите, что каждый элемент из L — корень некоторого многочлена степени не выше n с коэффициентами из K.

6. **Лемма о башне.** Пусть $K \subset L \subset M$. Докажите, что расширение M над K конечно тогда и только тогда, когда конечны расширения M над L и L над K, причём

$$[M : K] = [L : K] \cdot [M : L].$$

7. **Теорема.** Пусть $K \subset L$. Тогда элементы L, алгебраические над K, образуют поле.
(а) Докажите теорему непосредственно: для α и β, алгебраических над K, постройте многочлены из $K[x]$, корнями которых являются элементы $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ и $1/\alpha$.
(б) Докажите теорему при помощи леммы о башне.

8. Чему равна размерность расширения

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}] : \mathbb{Q}]?$$

9. Пусть α, β — два корня многочлена $x^3 - 17$. Найдите размерность расширения

$$[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}].$$

10. Докажите, что

$$\sqrt[5]{13} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{11}].$$

11. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Докажите, что

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}] = 2^n.$$

Конечные поля

Определение. Поле $\mathbb{F}$ называется *конечным*, если мощность $|\mathbb{F}|$ его множества — конечна.

Определение. *Характеристикой* поля $\mathbb{F}$ называется наименьшее такое $p \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}}_{p \text{ раз}} = 0$ в $\mathbb{F}$. Если такого натурального числа не существует, то говорят, что характеристика равна 0. Обозначение: $\operatorname{char}\mathbb{F}$.

Определение. *Порядком* элемента $a \neq 0$ в конечном поле $\mathbb{F}$ будем называть такое минимальное натуральное число n, что $a^n = 1_{\mathbb{F}}$. Обозначение: $\operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}$.

1. Докажите, что характеристика конечного поля — простое число.

2. **(а)** Пусть для конечного поля $\operatorname{char}\mathbb{F} = p$. Докажите, что

$$\mathbb{F}_p = \{\underbrace{1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}}_{n \text{ раз}} \mid n = 1, 2, \ldots, p\}$$

образует подполе в $\mathbb{F}$.
(б) Докажите, что $\mathbb{F}_p$ изоморфно полю $\mathbb{Z}_p$.
(в) Докажите, что $|\mathbb{F}| = p^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

3. Для каждого $a \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ введём обозначение $\langle a\rangle = \{a^i \mid i \in \{1, 2, \ldots, \operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}\}\}$. Элемент $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ называется *примитивным*, если $\langle a\rangle = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.
(а) Докажите, что $\operatorname{ord}(a)_{\mathbb{F}}$ делит $|\mathbb{F}|-1$ (Как следствие, верна *малая теорема Ферма* $a^{|\mathbb{F}|-1} = 1$).

(б) Докажите, что многочлен $x^d - 1$ имеет ровно d корней над конечным полем F.

(в) Докажите, что есть в точности $\varphi(d)$ элементов конечного поля $\mathbb{F}$, порядок которых равен d. Выведите отсюда, что у конечного поля существует примитивный элемент. [2]

4. Пусть $f(x)$ — неприводимый над $\mathbb{Z}_p$ многочлен степени d. Покажите, что в $\mathbb{Z}_p[x]$ множество классов эквивалентности

$$P(x) \equiv Q(x) \pmod f \Leftrightarrow f(x)|(P(x) - Q(x))$$

является полем с p^d элементами. Далее будем обозначать это поле как $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$.

Комментарий. Про эту конструкцию полезно думать как про расширение поля $\mathbb{Z}_p$ до $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$ классом эквивалентности x, причем $f(x)$ это минимальный многочлен для x.

[2] Безумие — это точное повторение одного и того же действия. Раз за разом, в надежде на изменение. (c) Vaas Montenegro

5. **(а)** Дано поле $\mathbb{F}$ мощности p^n. Пусть a — примитивный элемент $\mathbb{F}$, а $f(x)$ — его минимальный многочлен с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ степени d. Докажите, что $d = n$.

(б) Докажите, что $\mathbb{F}$ изоморфно $\mathbb{Z}_p[x]/(f)$. Выведите отсюда, что все конечные поля одинаковой мощности изоморфны друг другу.

6. Зафиксируем p. Обозначим через A_d число приведенных неприводимых многочленов степени d с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$. Покажем, что $A_d \neq 0$.

(а) Докажите, что если $d|n$, то $x^{p^n} - x$ делится на неприводимый многочлен $f(x)$ степени d.

(б) Докажите, что если $x^{p^n} - x$ делится на неприводимый многочлен $f(x)$ степени d, то $d|n$.

(в) Докажите, что $p^n = \sum\limits_{d|n} dA_d$.

(г) С помощью метода включений-исключений выразите A_d из прошлой формулы и покажите, что это не ноль.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Для любого простого p и натурального n существует поле мощности p^n, единственное с точностью до изоморфизма. Оно обозначается $\mathbb{F}_{p^n}$ и называется *полем Галуа*.

Уравнение Пелля

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. В этом кольце есть операция *сопряжения*

$$\overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}.$$

Нормой элемента $a + b\sqrt{m}$ назовём

$$N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2 = (a + b\sqrt{m}) \cdot \overline{a + b\sqrt{m}}$$

Замечание. Решить уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1 \iff$ найти все элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ нормы 1.

Определение. Пусть (x_1, y_1) — нетривиальное положительное решение уравнения Пелля с наименьшим x_1. Оно называется *фундаментальным*.

1. **(а)** Докажите, что элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ обратим (то есть существует элемент β того же кольца такой, что $\alpha\beta = 1$) тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$.
(б) Пусть (x, y) — решение уравнения Пелля, $\eta = x + y\sqrt{m}$. Тогда

$$\eta > 1 \iff x > 0, y > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1 \iff x > 0, y < 0.$$

(в) Докажите, что все элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ с нормой 1 имеют вид $\pm(x_1 + y_1\sqrt{m})^k, k \in \mathbb{Z}$.
(г) Докажите, что все решения уравнения Пелля — это пары

$$\pm\left(\frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k + (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k - (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}}\right)$$

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

3. Пифагорова тройка $(3, 4, 5)$ такова, что длины катетов отличаются на 1. Сколько всего пифагоровых троек с этим свойством?

4. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}, x_2 + y_2\sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Оказалось, что $x_1 \equiv x_2 \bmod n$ и $y_1 \equiv y_2 \bmod n$, где $n = |N(x_2 + y_2\sqrt{m})|$. Докажите, что тогда $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

5. Докажите, что если на некоторой гиперболе

$$l_N = \{(x, y) : x^2 - my^2 = N\}$$

лежит бесконечное число целых точек, то уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное решение.

6. *Лемма Минковского.* На координатной плоскости расположена выпуклая фигура площади больше 4, симметричная относительно начала координат. Докажите, что в ней найдётся ещё одна целочисленная точка.

7. Рассмотрим гиперболы с уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$.

(а) Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй. Найдите площадь параллелограмма с вершинами в этих точках. Зависит ли она от x_0 и y_0?

(б) С помощью леммы Минковского докажите, что для какого-то N на гиперболе $x^2 - my^2 = N$ найдётся бесконечно много целых точек.

Замечание. Таким образом, мы доказали, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

2 Геометрия

База

Важный принцип. В любой задаче надо подумать, есть ли у неё плоский аналог. Если есть, то решение плоского аналога (возможно, как-то адаптированное) можно попробовать перенести в пространство. Естественно, так работает не со всеми решениями. Например, поскольку сумма углов тетраэдра не фиксирована и вписанных углов нет, то большинство решений со счётом углов не переносятся.

Прямые и плоскости

1. Три прямые пересечения трёх плоскостей либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

2. Для двух скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, содержащая эти прямые. Расстояние между прямыми равно расстоянию между этими плоскостями.

3. Если среди нескольких прямых любые две пересекаются, то либо все прямые лежат в одной плоскости, либо все пересекаются в одной точке.

Углы

4. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Пусть ℓ — прямая, не перпендикулярная плоскости α, ℓ' — её ортогональная проекция на α, m — прямая в плоскости α. Тогда $\ell \perp m \Leftrightarrow \ell' \perp m$.

5. Плоскости α и β перпендикулярны тогда и только тогда, когда существует прямая ℓ в α, перпендикулярная β.

6. Угол между прямой и плоскостью — это наименьший из углов, который данная прямая образует с прямыми, лежащими в плоскости.

7. Угол между плоскостями равен углу между нормалями к ним.

Сферы

8. Сфера и плоскость пересекаются по окружности, две сферы — тоже (ну, ещё могут касаться или не иметь общих точек).

9. Проекция центра сферы на секущую плоскость — это центр окружности пересечения. В частности, центр описанной сферы многогранника проецируется в центры описанных окружностей граней. А если проецировать на ребро, то попадём в середину ребра.

10. Есть касательные плоскости и прямые. Каждая касательная прямая лежит в касательной плоскости. Если провести все касательные из точки, то получится конус. У двух сфер, ни одна из которых не лежит внутри другой,

есть общие касательные плоскости. Если касательную плоскость вращать вокруг линии центров, то она будет огибать конус (или цилиндр); в частности, все общие касательные плоскости (внутренние или внешние) пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

Преобразования

11. Есть движения. Параллельный перенос, симметрия относительно плоскости, прямой, точки ведут себя совсем так же. Поворота вокруг точки нет, только вокруг прямой. Есть гомотетия, она тоже аналогична.

Тетраэдр

12. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3:1$. Бимедианы пересекаются в этой же точке и делятся ей пополам.

13. У тетраэдра существуют вписанная и описанная сферы. Из вписанной сферы гомотетией можно получить ещё 4 сферы, которые касаются всех плоскостей граней. Они называются вневписанными сферами.

14. Высоты тетраэдра не всегда пересекаются в одной точке.

15. Сумма двугранных углов тетраэдра не фиксирована.

16. Формулы для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1S_2\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{1}{6}\cdot abd\cdot\sin\varphi.$$

Какие-то факты

17. Геометрическое место точек, равноудалённых от сторон двугранного угла, — это плоскость (биссекторная плоскость); она является плоскостью симметрии двугранного угла. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух точек, — это плоскость (срединная плоскость или серединный перпендикуляр).

18. **Пространственная теорема Менелая.** На прямых, содержащих рёбра замкнутой четырёхзвенной неплоской ломаной $ABCD$, выбраны точки P, Q, R, S соответственно. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}} = 1.$$

19. Даны плоскости, угол между которыми равен φ. Многоугольник площади S, лежащий в одной плоскости, ортогонально спроецировали на другую плоскость, получили многоугольник площади S'. Тогда $S' = S\cos\varphi$.

20. Неравенство треугольника трёхгранного угла. У трёхгранного угла сумма двух плоских углов больше третьего.

21. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Стереометрия без сфер

1. Докажите, что если у тетраэдра пересекаются два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, то также пересекаются отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней.

2. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

3. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB_1, AC_1, AD_1 на биссекторные плоскости при ребрах CD, BD, BC. Докажите, что плоскости $B_1C_1D_1$ и BCD параллельны.

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

5. Внутренняя биссекторная плоскость при ребре AB тетраэдра $ABCD$ проходит через середину ребра CD. Докажите, что внешняя биссекторная плоскость при ребре AB параллельна прямой CD.

6. Основания трёх высот тетраэдра являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что тетраэдр правильный.

7. Все боковые грани выпуклой n-угольной призмы равны. Для каких n из этого обязательно следует, что призма прямая?

8. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

9. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

Добавка

1. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар рёбер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел (1, 2, 3, 4) (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, рёбра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре рёбра тоже перпендикулярны.

2. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

3. Прямая пересекает три высоты тетраэдра. Доказать, что она пересекает четвертую высоту (или параллельна ей).

4. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M таким образом, что $\angle MAD = \angle MBC$ и $\angle MDB = \angle MCA$. Докажите, что

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD < \max(AD \cdot BC, AC \cdot BD)\,.$$

Стереометрия со сферами

В стереометрии вписанных углов нет, только прямые.

Есть степень точки, она определяется аналогично плоскости. У двух сфер есть радикальная плоскость, у трёх сфер есть радикальная прямая, у четырёх сфер есть радикальный центр (почти всегда).

1. Сфера касается всех боковых граней пирамиды. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

2. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром O. Плоскость, перпендикулярная OA, пересекает рёбра AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 лежат на одной сфере.

3. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

4. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Существует сфера ω, которая касается всех ребер пирамиды, и другая сфера ω_1, которая касается всех сторон основания $ABCD$ и прямых SA, SB, SC и SD. Докажите, что боковые рёбра пирамиды равны.

5. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Все фрукты являются шарами. Докажите, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости.

6. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны.

7. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра AB.

8. Две различные сферы S_1, S_2 проходят через вершины треугольника ABC. Точка M движется по S_1 вне плоскости ABC. Вторые пересечения прямых MA, MB, MC со сферой S_2 обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ либо все касаются одной фиксированной сферы, либо все проходят через одну фиксированную точку.

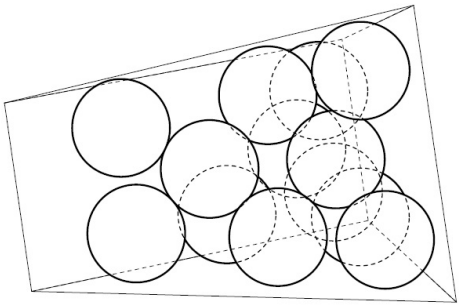
9. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, а J — центр сферы, касающейся грани BCD и плоскостей остальных граней (вне самих граней).

Отрезок IJ пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке K. Что больше: IK или JK?

Добавка

1. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, точки A', B', C', D' — центры описанных сфер тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что описанная сфера тетраэдра $ABCD$ целиком лежит внутри описанной сферы тетраэдра $A'B'C'D'$.

2. Дед Мороз готовит подарок с 13 одинаковыми шарообразными апельсинами, складывая их в коробку, имеющую форму (не обязательно прямой) призмы. В первом слое три апельсина лежат в углах (каждый касается дна и двух боковых граней), ещё три — у сторон (каждый касается дна и своей боковой грани). Во втором слое — три апельсина, каждый касается одного углового и двух соседних боковых апельсинов. Поверх них выкладывается третий слой — три апельсина, каждый касается одного *своего* апельсина из второго слоя и двух соседних боковых граней, и ещё один, касающийся трёх апельсинов из второго слоя (см. рис.). Докажите, что четыре апельсина третьего слоя касаются одной плоскости.

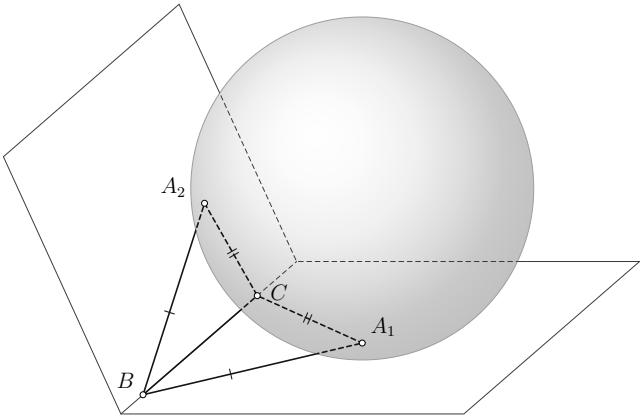


3. Противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны. Тетраэдр вписан в сферу Ω. Точку X, лежащую на Ω, отразили относительно плоскостей граней тетраэдра. Пусть Y — центр сферы, проходящей через четыре полученных точки. Докажите, что Y лежит на Ω.

4. Докажите, что из четырёх центров вневписанных сфер тетраэдра либо хотя бы один лежит вне описанной сферы и хотя бы один внутри, либо все четыре лежат на описанной сфере.

Загибание треугольников

Наблюдение. Сфера, вписанная в двугранный угол, касается граней угла в точках A_1 и A_2. Точки B и C лежат на ребре двугранного угла. Тогда $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$.



1. В пирамиду с основанием-параллелограммом вписана сфера. Докажите, что сумма площадей одной пары противоположных боковых граней равна сумме площадей другой пары.

2. **(а)** Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается грани BCD в точке A_1. Выразите угол CBA_1 через плоские углы при вершине B.
(б) Вневписанная сфера касается грани BCD в точке A_2. Докажите, что точки A_1 и A_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD. Что будет в случае n-угольной пирамиды?

3. В четырёхугольную пирамиду $SABCD$ можно вписать сферу. Пирамиду разрезали по рёбрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость $ABCD$. Докажите, что четыре образа точки S лежат на одной окружности.

4. Грани выпуклого многогранника покрашены в белый и чёрный цвета. Оказалось, что никакие две чёрные грани не имеют общего ребра и чёрных граней больше половины. Докажите, что в этот многогранник нельзя вписать сферу.

5. Все грани выпуклого шестигранника — четырёхугольники, а в каждой вершине сходится три ребра. Шестигранник описан около сферы с центром I. Известно, что проекции точки I на рёбра некоторой грани шестигранника лежат на одной окружности. Докажите, что проекции точки I на ребра противоположной грани также лежат на одной окружности.

6. Докажите, что в выпуклый четырёхгранный угол можно вписать сферу то-

гда и только тогда, когда суммы противоположных плоских углов равны.

7. Выпуклый многогранник $SABCS_1$ составлен из двух тетраэдров $SABC$ и S_1ABC, точки S и S_1 лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Докажите, что в него можно вписать сферу тогда и только тогда, когда вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и S_1ABC касаются.

Инверсия

В пространстве есть инверсия. При инверсии

- плоскость, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;
- плоскость, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, проходящую через центр инверсии;
- сфера, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, не проходящую через центр инверсии;
- окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.

Если центр инверсии не лежит в плоскости окружности, то окружность и её образ после инверсии лежат на одной сфере.

Среди инверсий, переводящих сферу в плоскость, выделяют *стереографическую проекцию*. Это инверсия с центром в точке O, лежащей на сфере, и радиусом, равным диаметру сферы. У стереографической проекции есть другое описание. Пусть сфера ω касается плоскости α, точка O диаметрально противоположна точке касания. Каждая точка A сферы, отличная от O, переходит в пересечение луча OA с плоскостью α.

Ещё одна полезная мысль: в некоторых стереометрических задачах помогает сведение к конфигурации окружностей на сфере. Далее, применив стереографическую проекцию в какой-нибудь точке сферы, можно получить планиметрическую задачу.

1. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом по циклу. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

2. Диагонали основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ перпендикулярны и пересекаются в P, причём SP — высота пирамиды. Докажите, что основания перпендикуляров из P к четырём боковым плоскостям лежат на одной окружности.

3. Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность.

4. В выпуклом шестиграннике все грани — четырехугольники, а семь его вершин лежат на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на этой сфере.

5. Даны три попарно касающиеся сферы ω_1, ω_2, ω_3. Сфера γ_1 касается всех этих трех сфер. Каждая следующая сфера γ_i касается изначальных трех и сферы γ_{i-1}, причём $\gamma_{i-1} \neq \gamma_{i+1}$. Докажите, что $\gamma_1 = \gamma_7$.

6. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A', B', C' соответственно. Точка C_1 — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а точка C_2 — общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA' и C_1BB', отличная от C_1. Аналогично определяются точки A_1, B_1, A_2 и B_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

7. Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

8. На ребрах тетраэдра произвольным образом выбрали по одной точке. Для каждой из вершин тетраэдра через нее и три выбранные точки, лежащие на выходящих из этой вершины ребрах, провели сферу. Докажите, что получившиеся четыре сферы пересекаются в одной точке.

Стереометрические неравенства

1. Шесть отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?

2. Докажите, что наименьший двугранный угол любого тетраэдра не превосходит двугранного угла правильного тетраэдра.

3. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

4. Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

5. **(а)** Тетраэдр $KLMN$ лежит внутри тетраэдра $ABCD$. Верно ли, что $P_{ABCD} \geqslant P_{KLMN}$ (через P_{ABCD} обозначена сумма длин рёбер тетраэдра $ABCD$)?
(б) Для какого наименьшего α обязательно верно, что $\alpha P_{ABCD} \geqslant P_{KLMN}$?

3 Комбинаторика

Двусвязные графы

Определение. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при её удалении (вместе со всеми выходящими рёбрами) граф теряет связность.

Определение. Связный граф называется *двусвязным*, если в нём больше одной вершины и нет точек сочленения.

1. **(а)** Рёбра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3.

(б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

2. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все его точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, B_2, \ldots, B_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причём все его висячие вершины соответствуют блокам.

4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов. Пусть G — связный граф с блоками $B_1, \ldots, B_n$. Докажите, что

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

5. Дано натуральное число $d > 1$. Про граф G известно, что в нём наибольшее расстояние между вершинами равно d и что для каждой вершины существует удалённая от неё ровно на d другая вершина. Докажите, что в графе есть простой цикл длины не меньше $2d$. (Длина простого пути или простого цикла — это число рёбер в нём.)

6. В двусвязном графе 100 вершин. За одну операцию разрешается выделить простой цикл в графе, добавить новую вершину и соединить каждую из вершин цикла с новой, после чего удалить все рёбра самого цикла. После нескольких таких операций граф превратится в дерево. Какое наименьшее число висячих вершин может быть у получившегося дерева?

7. Дан двусвязный граф G, в котором есть три попарно соединённые друг с другом вершины. Во всех вершинах, кроме одной, стоит по одной фишке (фишки различны), а оставшаяся вершина пустая. За ход разрешается переместить фишку из любой вершины в смежную с ней пустую вершину. Докажите, что такими ходами можно добиться любого наперёд заданного распределения фишек (по одной фишке во всех вершинах, кроме одной).

8. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

9. В стране 100 городов, соединённых друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на две провинции, по 50 городов в каждой, так, что в обеих провинциях из любого города можно проехать в любой другой.

Фазовое пространство

1. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

2. **(а)** В плоскость вбиты n гвоздей общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой. Две прямые плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно непрерывно перетащить в другую, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число прямых можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?
(б) В плоскость вбиты n гвоздей супер-общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Две окружности плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно превратить в другую, непрерывно перемещая центр и непрерывно варьируя радиус, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число окружностей можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?

3. *Горой* назовём график кусочно-линейной непрерывной функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(x) \in (0,1)$ для всех $x \in (0,1)$. *Высотой* точки (x, y) на горе назовём значение y. Даны **(а)** две; **(б)** три горы, по каждой из которых одновременно поднимаются флатландцы из точки $(0,0)$ в точку $(1,1)$. Докажите, что они могут подниматься так, чтобы всё время находиться на одинаковой высоте.

4. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.

5. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

6. **(а)** (*Теорема Пуанкаре о возвращении.*) На плоскости нарисован квадрат ■ размера 1×1. Пусть $f\colon ■ \to ■$ — это биективная функция, сохраняющая площади любых подмножеств квадрата ■. Пусть $A \subset ■$ — фигура поло-

жительной площади. Докажите, что существует точка $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{f(f(\dots f}_{n}(a))) \in A$.

(б) Дан выпуклый многоугольник с рационально кратными π углами. Докажите, что в нём существует периодическая бильярдная траектория.

Множества

1. Какое наибольшее количество различных трехэлементных подмножеств можно выбрать в множестве из 2026 элементов так, чтобы никакие два не имели в пересечении ровно один элемент?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку.
(а) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.
(б) А может ли быть ровно 50?

3. В множестве, состоящем из 101 элемента, выбрали 2^{51} различных подмножеств. Докажите, что найдутся три таких различных подмножества, что одно вложено в объединение двух других.

4. Дано $n \geqslant 2$ различных натуральных чисел, для каждой пары выписаны их НОД и НОК. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться?

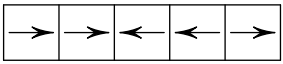
5. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

6. В множестве X выбрано 2026 подмножеств таких, что для любого $1 \leqslant k \leqslant 2025$ пересечение любых k подмножеств имеет четное число элементов, а пересечение всех 2026 подмножеств имеет нечетное число элементов. Какое наименьшее число элементов может быть в множестве X?

7. В множестве X выбраны два семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ 100-элементных подмножеств таких, что для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ верно $A \cap B \neq \emptyset$. Докажите, что все элементы множества X можно покрасить в три цвета так, чтобы никакое множество из $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ не было одноцветным.

Слова

1. В каждой клетке горизонтальной полоски 1×99 нарисована одна стрелка, указывающая влево или вправо. Докажите, что найдётся такая стрелка, на которую указывает столько же стрелок, на сколько других стрелок она сама указывает.



Пример: на рисунке выше подходит стрелка во второй слева клетке.

2. Дана строка из 250 цифр, в которой 125 нулей и 125 единиц. За одну операцию разрешается выделить кусочек из нескольких цифр подряд, среди которых поровну нулей и единиц, и переписать этот кусочек, поменяв порядок символов на противоположный и заменив все нули на единицы и единицы на нули. Вот пример операции:

$$\ldots 1\underbrace{11001001}0\ldots \quad\longrightarrow\quad \ldots 1\underbrace{01101100}0\ldots$$

Докажите, что этими операциями нельзя получить строку такую же, как исходная, но в которой цифры идут в обратном порядке.

3. В алфавите из n букв *словом* называется каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово считается *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $xxyy$, где x и y — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

4. **(а)** Мальчик Коля любит писать на заборах слова из трёх букв: *abc*, *bca*, *cab*. Он может вписать эти три буквы в любое место уже написанного на заборе слова (т. е. в начало, в конец или между любыми двумя буквами). Докажите, что Коля не сможет из пустого слова такими операциями получить непустой палиндром. **(б)** Коля научился писать слова *bac*, *acb*, *cba* и всё-таки смог записать непустой палиндром. Докажите, что он написал слов *abc*, *bca*, *cab* в сумме столько же, сколько слов *bac*, *acb*, *cba*.

5. Рассмотрим слова конечной длины над алфавитом из двух букв α и β. Для слов u и w будем писать $w \leqslant u$, если слово w может быть получено из слова u вычёркиванием нескольких букв (возможно, ни одной). Скажем, что слово w *различает* слова u и v, если $w \leqslant u$ и $w \not\leqslant v$ (или наоборот). Два слова *похожи*, если для них не существует различающего слова длины не более 10. Для какого наименьшего натурального n существуют два различных похожих слова длины n?

Часть III

Материалы группы 11–3

1 Алгебра

Алгебраические числа

Определение. Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. В противном случае число называется *трансцендентным*.

Определение. Многочлен с рациональными коэффициентами минимальной степени, корнем которого является данное алгебраическое число, называется его *минимальным многочленом*.

1. Докажите, что $\cos(a\pi)$ и $\sin(a\pi)$ — алгебраические числа, если $a \in \mathbb{Q}$.

2. **(а)** Докажите, что минимальный многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.
(б) Докажите, что любой многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является данное алгебраическое число, кратен соответствующему минимальному многочлену.
(в) Пусть $P(x)$ — минимальный многочлен для числа α. Пусть также β — некоторый другой корень $P(x)$. Докажите, что $P(x)$ — минимальный многочлен для β.

Определение. Алгебраические числа, являющиеся корнями одного и то же минимального многочлена, называются *сопряженными*.

3. Докажите, что сумма кубов сопряженных чисел является рациональным числом.

4. Даны алгебраические числа α и β.
(а) Докажите, что $1/\alpha$ и $p\alpha$, где $p \in \mathbb{Q}$, тоже алгебраические.
(б) Рассмотрим множество конечных сумм вида $\sum\limits_{i,j} c_{ij}\alpha^i\beta^j$, где $c_{ij} \in \mathbb{Q}$, и зададим на нем естественные операции сложения и умножения на рациональные числа. В результате получим векторное пространство. Докажите, что оно конечномерное.
(в) Докажите, что $\alpha \cdot \beta$ и $\alpha + \beta$ — алгебраические числа.

Таким образом, с алгебраическими числами можно проделывать арифметические операции, и в результате будет снова получаться алгебраическое число. Последний пункт можно также доказать по-другому, явно предъявив некоторый (возможно, не минимальный) многочлен.

5. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — наборы сопряженных корней для чисел α_1 и β_1 соответственно. Рассмотрим многочлены

$$S(x) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i - \beta_j), \quad P(x) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i\beta_j).$$

Докажите, что все их коэффициенты рациональные числа.

6. Не равные нулю алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеют минимальные многочлены степеней $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Известно, что $d_i > d_1 d_2 \ldots d_{i-1}$ при всех $i = 2, \ldots, n$. Докажите, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

7. Дан неприводимый многочлен с рациональными коэффициентами степени p, где p — простое. Обозначим его корни (возможно, комплексные) через $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Пусть также $g(x)$ — другой многочлен с рациональными коэффициентами степени больше нуля, но меньше p. Докажите, что числа $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_p)$ попарно различны.

Разнобой по многочленам над $\mathbb{F}_p$

1. Сколько существует приведенных неприводимых в $\mathbb{F}_p$ многочленов степени 3?

2. Разложите многочлен $x^9 - x$ на неприводимые в $\mathbb{F}_3$.

3. Пусть p — простое число, а x, y, z — некоторые ненулевые остатки по модулю p. Известно, что x^3, y^3, z^3 сравнимы по модулю p. Докажите, что $x+y+z | x^2+y^2+z^2$.

4. **(а)** Существует ли непостоянный многочлен $f(x)$ с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ такой, что $\deg(f) < p$ и он периодичен с периодом k, где k — ненулевой остаток по модулю p?
(б) Пусть p — простое число, m не делится на p. Докажите, что многочлен $P(x) = x^p - x - m$ неприводим в $\mathbb{F}_p$.

5. Многочлен $(x+1)^n - 1$ с целыми коэффициентами делится на многочлен $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ чётной степени k, у которого все коэффициенты нечётны. Докажите, что n делится на $k+1$.

6. Антон Игоревич выписал на доску все многочлены над $\mathbb{F}_p$ степени не больше 10, имеющие ненулевой свободный член. Игорь Константинович перемножил все эти многочлены и выписал результат себе на листочек. Найдите коэффициент при x^9 у выписанного Игорем Константиновичем многочлена **(а)** при $p > 3$, **(б)** при $p = 3$.

7. Дан многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ с целыми коэффициентами степени d. Известно, что среди набора чисел $f(1), f(2), \ldots, f(p)$ есть ровно k различных остатков по простому модулю p, где $1 < k < p$. Докажите, что $\frac{p-1}{d} \leqslant k - 1$.

Уравнение Пелля

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Решение (x_0, y_0) называется *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Рассмотрим множество квадратичных иррациональностей

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \left\{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

На этом множестве есть операция *сопряжения*

$$\overline{a + b\sqrt{m}} = a - b\sqrt{m}.$$

Нормой элемента $a + b\sqrt{m}$ назовём

$$N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2 = (a + b\sqrt{m}) \cdot \overline{a + b\sqrt{m}}.$$

Замечание. Решить уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1 \iff$ найти все числа вида $a + b\sqrt{m}$ нормы 1.

Определение. Пусть (x_1, y_1) — нетривиальное положительное решение уравнения Пелля с наименьшим x_1. Оно называется *фундаментальным*.

1. **(а)** Докажите, что для числа $\alpha = a + b\sqrt{m}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, найдется число $\beta = c + d\sqrt{m}$, $c, d \in \mathbb{Z}$ такое, что $\alpha\beta = 1$, тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$.
(б) Пусть (x, y) — решение уравнения Пелля, $\eta = x + y\sqrt{m}$. Тогда

$$\eta > 1 \iff x > 0, y > 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1 \iff x > 0, y < 0.$$

(в) Докажите, что все квадратичные иррациональности $a + b\sqrt{m}$ с нормой 1 имеют вид $\pm(x_1 + y_1\sqrt{m})^k, k \in \mathbb{Z}$.
(г) Докажите, что все решения уравнения Пелля — это пары

$$\pm\left(\frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k + (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{m})^k - (x_1 - y_1\sqrt{m})^k}{2\sqrt{m}}\right)$$

2. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 6xy + y^2 = 1$.

3. Пифагорова тройка $(3, 4, 5)$ такова, что длины катетов отличаются на 1. Сколько всего пифагоровых троек с этим свойством?

4. Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}, x_2 + y_2\sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Оказалось, что $x_1 \equiv x_2 \bmod n$ и $y_1 \equiv y_2 \bmod n$, где $n = |N(x_2 + y_2\sqrt{m})|$. Докажите, что тогда $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

5. Докажите, что если на некоторой гиперболе

$$l_N = \{(x, y) : x^2 - my^2 = N\}$$

лежит бесконечное число целых точек, то уравнение Пелля $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное решение.

6. *Лемма Минковского.* На координатной плоскости расположена выпуклая фигура площади больше 4, симметричная относительно начала координат. Докажите, что в ней найдётся ещё одна целочисленная точка.

Подсказка. Рассмотрим все выпуклые фигуры, получающиеся из данной переносами на векторы, обе координаты которых чётны. Могут ли пересекаться две такие фигуры? Что можно сказать про суммарную площадь фигур, центры которых лежат внутри какого-нибудь большого квадрата?

7. Рассмотрим гиперболы с уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$.

(а) Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй. Найдите площадь параллелограмма с вершинами в этих точках. Зависит ли она от x_0 и y_0?

(б) С помощью леммы Минковского докажите, что для какого-то N на гиперболе $x^2 - my^2 = N$ найдётся бесконечно много целых точек.

Замечание. Таким образом, мы доказали, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

$\eta\ \nu\rho$**венств**α

1. Положительные числа η, ν, ξ удовлетворяют условию $\frac{3}{\eta\nu\xi} \geqslant \eta + \nu + \xi$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\xi} \geqslant \eta + \nu + \xi.$$

2. Положительные числа η, ν, ξ таковы, что $\eta + \nu + \xi = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{\eta + \nu\xi} + \frac{1}{\nu + \xi\eta} + \frac{1}{\xi + \eta\nu} \geqslant \frac{7}{1 + \eta\nu\xi}.$$

3. Сумма положительных чисел η, ν, ξ, ρ равна 4. Докажите, что

$$\frac{\eta}{1 + \nu^2\xi} + \frac{\nu}{1 + \xi^2\rho} + \frac{\xi}{1 + \rho^2\eta} + \frac{\rho}{1 + \eta^2\nu} \geqslant 2.$$

4. Сумма положительных чисел η, ν, ξ равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{\eta} + \sqrt{\nu} + \sqrt{\xi} \geqslant \eta\nu + \nu\xi + \eta\xi.$$

5. Вещественные числа η, ν, ξ таковы, что

$$\eta^2(\xi^2 - 2\nu - 1) + \nu^2(\eta^2 - 2\xi - 1) + \xi^2(\nu^2 - 2\eta - 1) = 0.$$

Докажите, что

$$3(\eta^2 + \nu^2 + \xi^2) + 4(\eta + \nu + \xi) + 3 \geqslant 6\eta\nu\xi.$$

6. Положительные вещественные числа η, ν, ξ удовлетворяют равенству $\eta\nu\xi = 1$. Докажите, что

$$2(\eta + \nu + \xi) + \frac{9}{(\eta\nu + \nu\xi + \xi\eta)^2} \geqslant 7.$$

7. Докажите, что для положительных η, ν, ξ верно

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(\eta^2 + \nu^2 + \xi^2 - \eta\nu)}\sqrt{(\nu^2 + \xi^2 + \eta^2 - \nu\xi)} \geqslant 2(\eta^2 + \nu^2 + \xi^2)$$

8. Даны положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Пусть μ_κ равно максимуму среди произведений вида $\alpha_\iota\beta_\zeta$ таких, что $\iota, \zeta \leqslant \kappa$. Докажите, что

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu)(\beta_1 + \ldots + \beta_\nu) \leqslant \nu(\mu_1 + \ldots + \mu_\nu).$$

2 Геометрия

База

Важный принцип. В любой задаче надо подумать, есть ли у неё плоский аналог. Если есть, то решение плоского аналога (возможно, как-то адаптированное) можно попробовать перенести в пространство. Естественно, так работает не со всеми решениями. Например, поскольку сумма углов тетраэдра не фиксирована и вписанных углов нет, то большинство решений со счётом углов не переносятся.

Прямые и плоскости

1. Три прямые пересечения трёх плоскостей либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

2. Для двух скрещивающихся прямых существует единственная пара параллельных плоскостей, содержащая эти прямые. Расстояние между прямыми равно расстоянию между этими плоскостями.

3. Если среди нескольких прямых любые две пересекаются, то либо все прямые лежат в одной плоскости, либо все пересекаются в одной точке.

Углы

4. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Пусть ℓ — прямая, не перпендикулярная плоскости α, ℓ' — её ортогональная проекция на α, m — прямая в плоскости α. Тогда $\ell \perp m \Leftrightarrow \ell' \perp m$.

5. Плоскости α и β перпендикулярны тогда и только тогда, когда существует прямая ℓ в α, перпендикулярная β.

6. Угол между прямой и плоскостью — это наименьший из углов, который данная прямая образует с прямыми, лежащими в плоскости.

7. Угол между плоскостями равен углу между нормалями к ним.

Сферы

8. Сфера и плоскость пересекаются по окружности, две сферы — тоже (ну, ещё могут касаться или не иметь общих точек).

9. Проекция центра сферы на секущую плоскость — это центр окружности пересечения. В частности, центр описанной сферы многогранника проецируется в центры описанных окружностей граней. А если проецировать на ребро, то попадём в середину ребра.

10. Есть касательные плоскости и прямые. Каждая касательная прямая лежит в касательной плоскости. Если провести все касательные из точки, то получится конус. У двух сфер, ни одна из которых не лежит внутри другой,

есть общие касательные плоскости. Если касательную плоскость вращать вокруг линии центров, то она будет огибать конус (или цилиндр); в частности, все общие касательные плоскости (внутренние или внешние) пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удалённой).

Преобразования

11. Есть движения. Параллельный перенос, симметрия относительно плоскости, прямой, точки ведут себя совсем так же. Поворота вокруг точки нет, только вокруг прямой. Есть гомотетия, она тоже аналогична.

Тетраэдр

12. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3:1$. Бимедианы пересекаются в этой же точке и делятся ей пополам.

13. У тетраэдра существуют вписанная и описанная сферы. Из вписанной сферы гомотетией можно получить ещё 4 сферы, которые касаются всех плоскостей граней. Они называются вневписанными сферами.

14. Высоты тетраэдра не всегда пересекаются в одной точке.

15. Сумма двугранных углов тетраэдра не фиксирована.

16. Формулы для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1S_2\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{1}{6}\cdot abd\cdot\sin\varphi.$$

Какие-то факты

17. Геометрическое место точек, равноудалённых от сторон двугранного угла, — это плоскость (биссекторная плоскость); она является плоскостью симметрии двугранного угла. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух точек, — это плоскость (срединная плоскость или серединный перпендикуляр).

18. **Пространственная теорема Менелая.** На прямых, содержащих рёбра замкнутой четырёхзвенной неплоской ломаной $ABCD$, выбраны точки P, Q, R, S соответственно. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}} = 1.$$

19. Даны плоскости, угол между которыми равен φ. Многоугольник площади S, лежащий в одной плоскости, ортогонально спроецировали на другую плоскость, получили многоугольник площади S'. Тогда $S' = S\cos\varphi$.

20. Неравенство треугольника трёхгранного угла. У трёхгранного угла сумма двух плоских углов больше третьего.

21. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Стереометрия без сфер

1. Докажите, что если у тетраэдра пересекаются два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, то также пересекаются отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней.

2. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

3. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB_1, AC_1, AD_1 на биссекторные плоскости при ребрах CD, BD, BC. Докажите, что плоскости $B_1C_1D_1$ и BCD параллельны.

4. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. В гранях ABC и ABD провели высоты AK и AL соответственно. Оказалось, что точки C, K, L, и D лежат на одной окружности. Докажите, что $AB \perp CD$.

5. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

6. Внутренняя биссекторная плоскость при ребре AB тетраэдра $ABCD$ проходит через середину ребра CD. Докажите, что внешняя биссекторная плоскость при ребре AB параллельна прямой CD.

7. Основания трёх высот тетраэдра являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что тетраэдр правильный.

8. Все боковые грани выпуклой n-угольной призмы равны. Для каких n из этого обязательно следует, что призма прямая?

9. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

Стереометрия со сферами

В стереометрии вписанных углов нет, только прямые.

Есть степень точки, она определяется аналогично плоскости. У двух сфер есть радикальная плоскость, у трёх сфер есть радикальная прямая, у четырёх сфер есть радикальный центр (почти всегда).

1. Сфера касается всех боковых граней пирамиды. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

2. Центры сфер ω_1, ω_2, ω_3 не лежат на одной прямой. Каждая из плоскостей π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_k$ касается всех трех сфер. Точки касания плоскости π_i со сферами обозначим через A_i, B_i, C_i, а центр описанной окружности треугольника $A_iB_iC_i$ — через O_i. Докажите, что точки O_1, $O_2, \ldots, O_k$ лежат на одной прямой.

3. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром O. Плоскость, перпендикулярная OA, пересекает рёбра AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 лежат на одной сфере.

4. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

5. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Существует сфера ω, которая касается всех ребер пирамиды и другая сфера ω_1, которая касается всех сторон основания $ABCD$ и прямых SA, SB, SC и SD. Докажите, что боковые рёбра пирамиды равны.

6. Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра AB.

7. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Все фрукты являются шарами. Докажите, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости.

8. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны.

9. Две различные сферы S_1, S_2 проходят через вершины треугольника ABC. Точка M движется по S_1 вне плоскости ABC. Вторые пересечения прямых MA, MB, MC со сферой S_2 обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно.

Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ либо все касаются одной фиксированной сферы, либо все проходят через одну фиксированную точку.

Добавка

1. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, а J — центр сферы, касающейся грани BCD и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок IJ пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке K. Что больше: IK или JK?

2. Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, точки A', B', C', D' — центры описанных сфер тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что описанная сфера тетраэдра $ABCD$ целиком лежит внутри описанной сферы тетраэдра $A'B'C'D'$.

Загибание треугольников

Наблюдение. Сфера, вписанная в двугранный угол, касается граней угла в точках A_1 и A_2. Точки B и C лежат на ребре двугранного угла. Тогда $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$.

1. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB, SBC, SCA в точках D, E, F соответственно. Найдите все возможные значения суммы углов SDA, SEB и SFC.

2. В пирамиду с основанием-параллелограммом вписана сфера. Докажите, что сумма площадей одной пары противоположных боковых граней равна сумме площадей другой пары.

3. **(а)** Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается грани BCD в точке A_1. Выразите угол CBA_1 через плоские углы при вершине B.
(б) Вневписанная сфера касается грани BCD в точке A_2. Докажите, что точки A_1 и A_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD.
(в) Сфера, вписанная в четырёхугольную пирамиду, касается основания $ABCD$ в точке T. Докажите, что $\angle ATB + \angle CTD = 180°$.
(г) Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается граней BCD и ABC в точках A_1 и D_1 соответственно. Докажите, что $\angle AD_1B = \angle CA_1D$.

4. В призму $ABCA'B'C'$ вписана сфера, касающаяся боковых граней $BCC'B'$, $CAA'C'$, $ABB'A'$ в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. При этом $\angle A_0BB' = \angle B_0CC' = \angle C_0AA'$.
(а) Чему могут равняться эти углы?
(б) Докажите, что отрезки AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.
(в) Докажите, что проекции центра сферы на прямые $A'B', B'C', C'A'$ образуют правильный треугольник.

5. Грани выпуклого многогранника покрашены в белый и чёрный цвета. Оказалось, что никакие две чёрные грани не имеют общего ребра и чёрных граней больше половины. Докажите, что в этот многогранник нельзя вписать сферу.

6. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней ABC, BCD, CDA, DAB в точках D', A', B', C' соответственно. Обозначим через S_{AB} площадь треугольника $AC'B$. Аналогично определим S_{AC}, S_{BC}, S_{AD}, S_{BD}, S_{CD}. Докажите, что из отрезков с длинами $\sqrt{S_{AB}S_{CD}}$, $\sqrt{S_{AC}S_{BD}}$, $\sqrt{S_{AD}S_{BC}}$ можно составить треугольник.

7. Все грани выпуклого шестигранника — четырёхугольники, а в каждой вершине сходится три ребра. Шестигранник описан около сферы с центром I. Известно, что проекции точки I на рёбра некоторой грани шестигранника лежат на одной окружности. Докажите, что проекции точки I на ребра противоположной грани также лежат на одной окружности.

Инверсия

В пространстве есть инверсия. При инверсии

- плоскость, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;
- плоскость, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, проходящую через центр инверсии;
- сфера, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, не проходящую через центр инверсии;
- окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность.

Если центр инверсии не лежит в плоскости окружности, то окружность и её образ после инверсии лежат на одной сфере. В частности, отсюда следует такой факт: если окружность лежит на сфере, а точка P не лежит на сфере, то вторые точки пересечения сферы с прямой, проходящей через эту точку и точку P, образуют окружность.

1. Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ — вписанный четырехугольник. Точка H — проекция вершины S на плоскость $ABCD$. Докажите, что проекции точки H на прямые AS, BS, CS и DS лежат на одной окружности.

2. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом по циклу. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

3. Диагонали основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ перпендикулярны и пересекаются в P, причём SP — высота пирамиды. Докажите, что основания перпендикуляров из P к четырём боковым плоскостям лежат на одной окружности.

4. В выпуклом шестиграннике все грани — четырехугольники, а семь его вершин лежат на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на этой сфере.

5. Даны три попарно касающиеся сферы ω_1, ω_2, ω_3. Сфера γ_1 касается всех этих трех сфер. Каждая следующая сфера γ_i касается изначальных трех и сферы γ_{i-1}, причём $\gamma_{i-1} \neq \gamma_{i+1}$. Докажите, что $\gamma_1 = \gamma_7$.

Стереометрические неравенства

1. Шесть отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?

2. Один тетраэдр лежит внутри другого. Верно ли, что сумма длин рёбер внутреннего тетраэдра меньше, чем у внешнего?

3. Докажите, что наименьший двугранный угол любого тетраэдра не превосходит двугранного угла правильного тетраэдра.

4. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

5. Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трёх его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

3 Комбинаторика

Двусвязные графы

Определение. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при её удалении (вместе со всеми выходящими рёбрами) граф теряет связность.

Определение. Связный граф называется *двусвязным*, если в нём больше одной вершины и нет точек сочленения.

1. **(а)** Рёбра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3.

(б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

2. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все его точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, B_2, \ldots, B_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причём все его висячие вершины соответствуют блокам.

4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов. Пусть G — связный граф с блоками $B_1, \ldots, B_n$. Докажите, что

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

5. Дано натуральное число $d > 1$. Про граф G известно, что в нём наибольшее расстояние между вершинами равно d и что для каждой вершины существует удалённая от неё ровно на d другая вершина. Докажите, что в графе есть простой цикл длины не меньше $2d$. (Длина простого пути или простого цикла — это число рёбер в нём.)

6. В двусвязном графе 100 вершин. За одну операцию разрешается выделить простой цикл в графе, добавить новую вершину и соединить каждую из вершин цикла с новой, после чего удалить все рёбра самого цикла. После нескольких таких операций граф превратится в дерево. Какое наименьшее число висячих вершин может быть у получившегося дерева?

7. Дан двусвязный граф G, в котором есть три попарно соединённые друг с другом вершины. Во всех вершинах, кроме одной, стоит по одной фишке (фишки различны), а оставшаяся вершина пустая. За ход разрешается переместить фишку из любой вершины в смежную с ней пустую вершину. Докажите, что такими ходами можно добиться любого наперёд заданного распределения фишек (по одной фишке во всех вершинах, кроме одной).

8. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

9. В стране 100 городов, соединённых друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на две провинции, по 50 городов в каждой, так, что в обеих провинциях из любого города можно проехать в любой другой.

Фазовое пространство

1. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

2. **(а)** В плоскость вбиты n гвоздей общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой. Две прямые плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно непрерывно перетащить в другую, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число прямых можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?
(б) В плоскость вбиты n гвоздей супер-общего положения — никакие три гвоздя не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Две окружности плоскости называются *эквивалентными*, если одну из них можно превратить в другую, непрерывно перемещая центр и непрерывно варьируя радиус, не задевая гвоздей. Какое наибольшее число окружностей можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие две из них не были эквивалентны?

3. *Горой* назовём график кусочно-линейной непрерывной функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(x) \in (0,1)$ для всех $x \in (0,1)$. *Высотой* точки (x, y) на горе назовём значение y. Даны **(а)** две; **(б)** три горы, по каждой из которых одновременно поднимаются флатландцы из точки $(0,0)$ в точку $(1,1)$. Докажите, что они могут подниматься так, чтобы всё время находиться на одинаковой высоте.

4. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.

5. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

Множества

1. Какое наибольшее количество различных трехэлементных подмножеств можно выбрать в множестве из 2026 элементов так, чтобы никакие два не имели в пересечении ровно один элемент?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку.
(а) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.
(б) А может ли быть ровно 50?

3. В множестве, состоящем из 101 элемента, выбрали 2^{51} различных подмножеств. Докажите, что найдутся три таких подмножества, что одно вложено в объединение двух других.

4. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимается не менее $\frac{2}{3}$ всего класса.

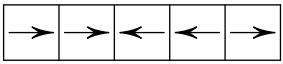
5. Имеется 24 карандаша четырех цветов, по 6 каждого цвета. Их раздали шести детям так, что у каждого оказалось ровно 4 карандаша. Какое наименьшее количество детей можно выбрать вне зависимости от распределения карандашей, чтобы у выбранных детей были карандаши всех цветов?

6. Дано $n \geqslant 2$ различных натуральных чисел, для каждой пары выписаны их НОД и НОК. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться?

7. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

Слова

1. В каждой клетке горизонтальной полоски 1×99 нарисована одна стрелка, указывающая влево или вправо. Докажите, что найдётся такая стрелка, на которую указывает столько же стрелок, на сколько других стрелок она сама указывает.



Пример: на рисунке выше подходит стрелка во второй слева клетке.

2. Дана строка из 250 цифр, в которой 125 нулей и 125 единиц. За одну операцию разрешается выделить кусочек из нескольких цифр подряд, среди которых поровну нулей и единиц, и переписать этот кусочек, поменяв порядок символов на противоположный и заменив все нули на единицы и единицы на нули. Вот пример операции:

$$\ldots 1\underbrace{11001001}0\ldots \quad\longrightarrow\quad \ldots 1\underbrace{01101100}0\ldots$$

Докажите, что этими операциями нельзя получить строку такую же, как исходная, но в которой цифры идут в обратном порядке.

3. В алфавите из n букв *словом* называется каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово считается *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $xxyy$, где x и y — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

4. **(а)** Мальчик Коля любит писать на заборах слова из трёх букв: *abc*, *bca*, *cab*. Он может вписать эти три буквы в любое место уже написанного на заборе слова (т. е. в начало, в конец или между любыми двумя буквами). Докажите, что Коля не сможет из пустого слова такими операциями получить непустой палиндром. **(б)** Коля научился писать слова *bac*, *acb*, *cba* и всё-таки смог записать непустой палиндром. Докажите, что он написал слов *abc*, *bca*, *cab* в сумме столько же, сколько слов *bac*, *acb*, *cba*.

5. Рассмотрим слова конечной длины над алфавитом из двух букв α и β. Для слов u и w будем писать $w \leqslant u$, если слово w может быть получено из слова u вычёркиванием нескольких букв (возможно, ни одной). Скажем, что слово w *различает* слова u и v, если $w \leqslant u$ и $w \not\leqslant v$ (или наоборот). Два слова *похожи*, если для них не существует различающего слова длины не более 10. Для какого наименьшего натурального n существуют два различных похожих слова длины n?

Множества. Добавка

1. В множестве X выбрано 2026 подмножеств таких, что для любого $1 \leqslant k \leqslant 2025$ пересечение любых k подмножеств имеет четное число элементов, а пересечение всех 2026 подмножеств имеет нечетное число элементов. Какое наименьшее число элементов может быть в множестве X?

2. В множестве X выбраны два семейства 100-элементных подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таких, что для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$ верно $A \cap B \neq \emptyset$. Докажите, что все элементы множества X можно покрасить в три цвета так, чтобы никакое множество из $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ не было одноцветным.

Часть IV

Тренировочные олимпиады

Тренировочная олимпиада, 4 задачи

1. Даны 67 квадратных трёхчленов $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{67}(x)$ и 34 действительных числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_{34}$. Докажите, что для каких-то двух из данных трёхчленов $f_i(x)$ и $f_j(x)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{33} \big(f_i(x_{k+1}) - f_i(x_k)\big)\big(f_j(x_{k+1}) - f_j(x_k)\big) > 0.$$

2. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки B_1, C_1, D_1 — середины рёбер AB, AC, AD соответственно; точки M_a, M_b, M_c, M_d — точки пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Медианы AM_a, BM_b, CM_c, DM_d тетраэдра пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, B_1, C_1, D_1, M лежат на одной сфере тогда и только тогда, когда точки A, M_b, M_c, M_d, M лежат на одной сфере.

3. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, причём разность прогрессии взаимно проста с числом x_1. Обозначим через m количество различных простых делителей произведения всех членов этой прогрессии. Предположим, что $m < n$. Докажите, что $x_1^{n-m} \leqslant (n-1)!$.

4. На окружности расставлены 2^{500} точек. Они занумерованы числами $1, 2, \ldots, 2^{500}$ в некотором порядке. Влад проводит 100 попарно непересекающихся хорд, соединяющих некоторые из этих точек (в частности, концы всех хорд различны). Для каждой хорды он вычисляет сумму чисел на её концах. Докажите, что Влад может провести хорды так, чтобы все полученные 100 чисел были равны.

Тренировочная олимпиада, 5 задач

1. На каждом неграничном единичном отрезочке доски 8×8 поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезочек лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

2. Даны 67 квадратных трёхчленов $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{67}(x)$ и 34 действительных числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_{34}$. Докажите, что для каких-то двух из данных трёхчленов $f_i(x)$ и $f_j(x)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{33} \big(f_i(x_{k+1}) - f_i(x_k)\big)\big(f_j(x_{k+1}) - f_j(x_k)\big) > 0.$$

3. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки B_1, C_1, D_1 — середины рёбер AB, AC, AD соответственно; точки M_a, M_b, M_c, M_d — точки пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Медианы AM_a, BM_b, CM_c, DM_d тетраэдра пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, B_1, C_1, D_1, M лежат на одной сфере тогда и только тогда, когда точки A, M_b, M_c, M_d, M лежат на одной сфере.

4. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?
(Разрешается посещать один и тот же город или совершать один и тот же перелет более одного раза.)

5. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, причём разность прогрессии взаимно проста с числом x_1. Обозначим через m количество различных простых делителей произведения всех членов этой прогрессии. Предположим, что $m < n$. Докажите, что $x_1^{n-m} \leqslant (n-1)!$.