Системы подмножеств

1. Имеется 24 карандаша четырех цветов, по 6 каждого цвета. Их раздали шести детям так, что у каждого оказалось ровно 4 карандаша. Какое наименьшее количество детей можно выбрать вне зависимости от распределения карандашей, чтобы у выбранных детей были карандаши всех цветов?

2. Какое наибольшее количество различных трехэлементных подмножеств можно выбрать в множестве из 2026 элементов так, чтобы никакие два не имели в пересечении ровно один элемент?

3. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимается не менее $\frac{2}{3}$ всего класса.

4. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. **(а)** Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений. **(б)** А может ли быть ровно 50?

5. В множестве, состоящем из 101 элемента, выбрали 2^{51} подмножеств. Докажите, что найдутся три таких подмножества, что одно вложено в объединение двух других.

6. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.