Стереометрия со сферами

В стереометрии вписанных углов нет, только прямые.

Есть степень точки, она определяется аналогично плоскости. Степень точки работает в обратную сторону для доказательства того, что несколько точек на одной сфере лежат. У двух сфер есть радикальная плоскость, у трёх сфер есть радикальная прямая, у четырёх сфер есть радикальный центр (почти всегда).

Наблюдение. Сфера, вписанная в двугранный угол, касается граней угла в точках A_1 и A_2. Точки B и C лежат на ребре двугранного угла. Тогда $\triangle A_1BC = \triangle A_2BC$.

1. Сфера касается всех боковых граней пирамиды. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

2. **(а)** Вписанная сфера тетраэдра $ABCD$ касается грани BCD в точке A_1. Выразите угол CBA_1 через плоские углы при вершине B.
(б) Вневписанная сфера касается грани BCD в точке A_2. Докажите, что точки A_1 и A_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD.
(в) Сфера, вписанная в четырёхугольную пирамиду, касается основания $ABCD$ в точке T. Докажите, что $\angle ATB + \angle CTD = 180^\circ$.

3. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром O. Плоскость, перпендикулярная OA, пересекают рёбра AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что точки B, C, D, B_1, C_1, D_1 лежат на одной сфере.

4. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

5. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Существует сфера ω, которая касается всех ребер пирамиды и другая сфера ω_1, которая касается всех сторон основания $ABCD$ и прямых SA, SB, SC и SD. Докажите, что боковые рёбра пирамиды равны.

6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Все фрукты являются шарами. Докажите, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости.

7. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны.

8. Грани выпуклого многогранника покрашены белый и чёрный цвета. Оказалось, что никакие две чёрные грани не имеют общего ребра и чёрных граней больше половины. Докажите, что в этот многогранник нельзя вписать сферу.