Алгебраические числа

Определение. Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. В противном случае, число называется трансцендентным.

Определение. Многочлен с рациональными коэффициентами минимальной степени, корнем которого является данное алгебраическое число, называется его *минимальным многочленом*.

1. Докажите, что $\cos(a\pi)$ и $\sin(a\pi)$ алгебраические числа, если $a \in \mathbb{Q}$.

2. **(а)** Докажите, что минимальный многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.
(б) Докажите, что любой многочлен, корнем которого является данное алгебраическое число, кратен соответствующему минимальному многочлену.
(в) Пусть $P(x)$ — минимальный многочлен для числа α. Пусть также β — некоторый другой корень $P(x)$. Докажите, что $P(x)$ минимальный многочлен для β.

Определение. Алгебраические числа являющиеся корнями одного и то же минимального многочлена называются *сопряженными*.

3. Докажите, что сумма кубов сопряженных чисел является рациональным числом.

4. Даны алгебраические числа α и β.
(а) Докажите, что $1/\alpha$ и $p\alpha$, где $p \in \mathbb{Q}$, тоже алгебраические.
(б) Пусть α_i, $i = 1 \dots n$ и β_j, $j = 1 \dots m$ — наборы сопряженных корней для чисел α_1 и β_1 соответственно. Рассмотрим многочлены

$$S(x) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i - \beta_j), \quad P(x) = \prod_{i,j}(x - \alpha_i\beta_j).$$

Докажите, что все их коэффициенты рациональные числа. Выведите отсюда, что сумма и произведение алгебраических чисел — алгебраическое число.

Таким образом, с алгебраическими числами можно проделывать арифметические операции, и в результате будет снова получаться алгебраическое число.

5. Не равные нулю алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_n$ имеют минимальные многочлены степеней $d_1, d_2, \dots, d_n$. Известно, что $d_i > d_1 d_2 \dots d_{i-1}$ при всех $i = 2, \dots, n$. Докажите, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

6. Дан неприводимый многочлен с рациональными коэффициентами степени p, где p — простое. Обозначим его корни, возможно, комплексные за $x_1, x_2, \dots, x_p$. Пусть также $g(x)$ — другой многочлен с рациональными коэффициентами степени больше нуля, но меньше p. Докажите, что числа $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_p)$ попарно различны.