Стереометрия без сфер

1. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

2. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, пересекающие данные, красятся в синий цвет. Какие точки останутся непокрашенными?

3. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB_1, AC_1, AD_1 на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B_1C_1D_1$ параллельна плоскости BCD.

4. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. В гранях ABC и ABD провели высоты AK и AL соответственно. Оказалось, что точки C, K, L, и D лежат на одной окружности. Докажите, что $AB \perp CD$.

5. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC и SD пирамиды $SABCD$.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырехугольники ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

6. Внутренняя биссекторная плоскость при ребре AB тетраэдра $ABCD$ проходит через середину ребра CD. Докажите, что внешняя биссекторная плоскость при ребре AB параллельна прямой CD.

7. Основания трёх высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что все рёбра пирамиды равны.

8. Все боковые грани выпуклой n-угольной призмы равны. Для каких n из этого обязательно следует, что призма прямая?

9. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.