Стягивание подграфов

1. (*Теорема Роббинса*) Докажите, что рёбра любого связного графа без мостов можно ориентировать так, чтобы по стрелкам можно было добраться из любой вершины в любую другую. Напомним, что *мостом* называется такое ребро связного графа, при удалении которого он теряет связность. В этой задаче в графе допускаются кратные рёбра.

2. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

3. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе (без петель и кратных стрелок) на $n \geqslant 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n-3$, так, чтобы граф остался сильно связным.

4. Для данного графа G и натурального числа x обозначим через $\chi_G(x)$ число способов раскрасить вершины графа G правильным образом в x цветов. Докажите, что $\chi_G(x)$ — это многочлен с целыми коэффициентами от x. Этот многочлен называется *хроматическим многочленом* графа G.

5. Вершины связного графа изначально раскрашены в два цвета. За ход можно выбрать любую вершину v и одновременно перекрасить в противоположный саму вершину v и все вершины, до которых из неё можно добраться по рёбрам, переходя только в вершины того же цвета, что и сама вершина v. Известно, что за k ходов можно все вершины сделать одноцветными. Докажите, что за k ходов можно все вершины сделать одноцветными, указывая на всех ходах на одну и ту же вершину.

6. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.