Стягивание подграфов

1. (*Теорема Роббинса*) Докажите, что рёбра любого связного графа без мостов можно ориентировать так, чтобы по стрелкам можно было добраться из любой вершины в любую другую. Напомним, что *мостом* называется такое ребро связного графа, при удалении которого он теряет связность.

2. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

3. Для данного графа G и натурального числа x обозначим через $\chi_G(x)$ число способов раскрасить вершины графа G правильным образом в x цветов. Докажите, что $\chi_G(x)$ — это многочлен с целыми коэффициентами от x. Этот многочлен называется *хроматическим многочленом* графа G.

4. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Определите минимальное натуральное число k, для которого верно следующее: в любом сильно связном ориентированном графе (без петель и кратных стрелок) на n вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более k стрелок, так, чтобы граф остался сильно связным.

5. Вершины связного графа изначально раскрашены в два цвета. За ход можно выбрать любую вершину v и одновременно перекрасить в противоположный саму вершину v и все вершины, до которых из неё можно добраться по рёбрам, переходя только в вершины того же цвета, что и сама вершина v. Известно, что за k ходов можно все вершины сделать одноцветными. Обязательно ли можно все вершины сделать одноцветными за k ходов, указывая на всех ходах на одну и ту же вершину?

6. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

7. В стране есть N городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого $2 \leqslant k \leqslant N$ при любом выборе k городов, количество авиалиний между этими городами превосходит $2k - 2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.

8. В ориентированном графе (без петель и кратных стрелок) из каждой вершины исходят как минимум три стрелки. Докажите, что в графе можно найти два не пересекающихся по вершинам ориентированных цикла.