Стандартные таблицы Юнга

Определение. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ — набор натуральных чисел, упорядоченный так, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \lambda_k$. *Диаграммой Юнга* формы λ называется таблица из k строк такая, что в i-ой строке ровно λ_i клеток.

1. У Димы есть кексы, разложенные в несколько коробок. Дима записал, сколько пирожных в каждой коробке. Максим взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Максим записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Димой равно количеству различных чисел среди записанных Максимом.

2. Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на доминошки.

Определение. *Стандартной таблицей* формы λ называется заполнение клеток диаграммы λ числами от 1 до $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают (слева направо и сверху вниз).

3. Назовём путь из точки $(0, 0)$ в точку (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ *правильным*, если он идёт только вправо и вверх по линиям сетки и не поднимается выше диагонали.

(а) Докажите, что количество путей из $(0, 0)$ в (a, b), которые идут по линиям сетки вправо и вверх и поднимаются выше диагонали $y = x$ (то есть касаются прямой $y = x + 1$) равно

$$\binom{a+b}{a+1}.$$

(б) Докажите, что количество правильных путей из $(0, 0)$ в (a, b) равно

$$\binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+1}.$$

(в) Докажите, что количество стандартных таблиц формы $\lambda = (a, b)$ равно

$$\binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+1}.$$

4. Пусть дана диаграмма Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ и бесконечная вправо полоса из клеток ширины 1. Самой левой клетке этой полосы присвоим номер 0, следующей за ней номер 1 и так далее.

(а) Докажите количество стандартных таблиц формы λ равно количеству способов переместить k (пронумерованных) фишек из клетки 0 в клетки с номерами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ соответственно, передвигая за ход по одной фишке в следующую клетку так, чтобы фишка с большим номером не обгоняла фишку с меньшим номером.

(б) Пусть $l_i = \lambda_i + k - i$. Докажите, что количество стандартных таблиц формы λ равно количеству *правильных перемещений* k фишек из клеток $(k-1, \ldots, 0)$ в клетки $(l_1, \ldots, l_k)$. Под правильным перемещением мы понимаем перемещение, в котором за ход можно передвинуть одну фишку на следующую клетку при условии, что эта клетка свободна.

5. Докажите, что количество правильных перемещений из $(k-1, k-2, \ldots, 0)$ в $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ равно

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \binom{N}{l_{\sigma(1)} - k + 1, l_{\sigma(2)} - k + 2, \ldots, l_{\sigma(k)}}.$$

Обозначение: $x^{\downarrow m} = x(x-1)\ldots(x-m+1)$.

6. Пусть λ — диаграмма Юнга. Положим $l_i = \lambda_i + k - i$. Введём обозначение:

$$\Delta(l_1, \ldots, l_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} l_{\sigma(1)}^{\downarrow k-1} l_{\sigma(2)}^{\downarrow k-2} \ldots l_{\sigma(k-1)} \cdot 1.$$

(а) Докажите, что $\Delta(l_1, \ldots, l_k) = \prod_{i<j}(l_i - l_j)$

(б) Используя пункт (а) и предыдущую задачу докажите, что количество стандартных таблиц формы λ равно

$$\frac{N!}{l_1! \ldots l_k!} \prod_{i<j}(l_i - l_j).$$

Определение. *Крюк* клетки s в диаграмме Юнга λ состоит из этой клетки и всех клеток, лежащих строго под ней или строго справа от неё. Количество клеток в крюке называется длиной крюка, обозначается $h_\lambda(s)$ или просто $h(s)$.

Теорема. (Формула крюков) Количество стандартных таблиц формы λ равно

$$\frac{N!}{\prod_{s \in \lambda} h(s)},$$

где произведение берётся по клеткам диаграммы λ, N — общее количество клеток.

7. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо ниже ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что

(а) $ks \leqslant 2n$,

(б) $ks \leqslant n$.

8. Докажите формулу крюков.