# Детерминант

**Определение.** *Формой $n$-мерного объёма* называется ненулевая функция от $n$ аргументов из $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{K}$

$$\omega : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K},$$

обладающая свойствами:

1. $\omega(\ldots, u + \lambda w, \ldots, w, \ldots) = \omega(\ldots, u, \ldots, w, \ldots)$
2. $\omega(\ldots, \lambda v, \ldots) = \lambda\omega(\ldots, v, \ldots)$.

**1.** Докажите, что каждая форма $n$-мерного объёма $\omega$ автоматически обладает следующими свойствами.
**(а)** Если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависимы, то $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$; в частности, форма $\omega$ кососимметрична, т.е. обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают: $\omega(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$.
**(б)** $\omega$ линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega(\ldots, \lambda u + \mu v, \ldots) = \lambda \cdot \omega(\ldots, u, \ldots) + \mu \cdot \omega(\ldots, v, \ldots).$$

*Подсказка. Если аргументы в одном из слагаемых правой части линейно независимы, то они образуют базис.*
**(в)** $\omega$ знакопеременна: $\omega(\ldots, u, \ldots, w, \ldots) = -\omega(\ldots, w, \ldots, u, \ldots)$. *Подсказка. Подумайте, как воспользоваться кососимметричностью.*
**(г)** Докажите, что ненулевая $n$-линейная кососимметричная форма на $n$-мерном векторном пространстве является формой $n$-мерного объёма.

**Теорема.** Пространство $n$-линейных кососимметричных форм на $n$-мерном векторном пространстве $V$ одномерно.

Зафиксируем какой-нибудь базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и рассмотрим произвольную $n$-линейную кососимметричную форму $\omega$ на $V$. Идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы выразить значение $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ на произвольном наборе векторов через $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, пользуясь линейностью и кососимметричностью.

**2.** Пусть $C = (c_{ij})$ — матрица размера $n \times n$, в $j$-м столбце которой стоят координаты вектора $v_j$ в базисе $e_1, e_2, \ldots e_n$, т.е.

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot e_i.$$

**(а)** Докажите, что

$$\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g(1),1} c_{g(2),2} \ldots c_{g(n),n} \qquad (1)$$

Здесь $S_n$ — группа перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $\operatorname{sgn}(g)$ — знак перестановки $g$.
**(б)** Докажите, что любые две $n$-линейные кососимметричные формы отличаются домножением на константу.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что для любого значения константы $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ формула (1) задаёт $n$-линейную кососимметричную форму на $V$. Мы сделаем это позже.

**Определение.** Определителем квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ размера $n \times n$ называют сумму

$$\det C := \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g(1),1} c_{g(2),2} \ldots c_{g(n),n}.$$

**3.** Докажите следующие свойства определителя:
**(а)** Если матрица $C$ — верхнетреугольная (т.е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$), то

$$\det C = c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}.$$

**(б)** Определитель линеен по каждому столбцу матрицы $C$ и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают. *Заметьте, что это наблюдение завершает доказательство теоремы.*
**(в)** Как меняется определитель при элементарных преобразованиях столбцов матрицы?
**(г)** Докажите, что для любой квадратной матрицы $\det C = \det C^t$.

**4.** Зафиксируем на векторном пространстве $V$ размерности $n$ форму объёма $\omega$. Для линейного оператора $F : V \to V$ докажите, что форма

$$\omega_F(v_1, v_2, \ldots, v_n) := \omega(Fv_1, Fv_2, \ldots, Fv_n)$$

линейна по каждому аргументу и кососимметрична.

**Определение.** Коэффициент пропорциональности $\omega_F/\omega$ называют определителем оператора $F$. Обозначение $\det F$.

**5.** Для произвольного базиса $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве $V$ запишем матрицу $F_e = (f_{ij})$ оператора $F$ в этом базисе, то есть

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} \cdot e_i.$$

Докажите, что $\det F = \det F_e$.

**Идея.** О матрице $n \times n$ всегда можно думать как о матрице оператора из $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, записанной в стандартном координатном базисе.

**6.** **(а)** Пусть $A, B$ две матрицы $n \times n$. Докажите, что $\det AB = \det A \cdot \det B$.
**(б)** Докажите, что квадратная матрица $A$ обратима, если и только если $\det A \neq 0$.
**(в)** Докажите, что система линейных уравнений из $n$ уравнений с $n$ неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая ей $n \times n$ матрица обратима.

**7.** Найдите определитель матрицы Вандермонда:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$