Алгебраический алгебробой по алгебре

1. Какое наибольшее количество решений может иметь уравнение

$$\max\{a_1x + b_1, a_2x + b_2, \ldots, a_{10}x + b_{10}\} = 0,$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{10}, b_{10}$ вещественные, а a_i не равны 0?

2. Про попарно различные числа a, b, c известно, что

$$a = ab + c, \quad b = bc + a, \quad c = ca + b.$$

Какие значения может принимать выражение $a + b + c$?

3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(f(x)) = x^{101}$ при всех действительных x. Найдите $f(-1) + f(0) + f(1)$.

4. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, такие что при всех натуральных n выполнено $P(n!) = |P(n)|!$.

5. Дано натуральное $n \geq 4$. Найдите все вещественные решения системы

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2 = x_2x_3 + 1, \\ x_2^3 + x_3 = x_3x_4 + 1, \\ \vdots \\ x_n^3 + x_1 = x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

6. Дана последовательность a_n:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

(одна '1', две '2' и так далее), и ещё одна последовательность b_n такая, что $a_{b_n} = b_{a_n}$ для всех натуральных n. Известно, что $b_k = 1$ при некотором $k > 100$. Докажите, что $b_m = 1$ для бесконечного количества индексов m.

7. Существует ли такое конечное множество A ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества A, все корни которого действительны и также принадлежат A?