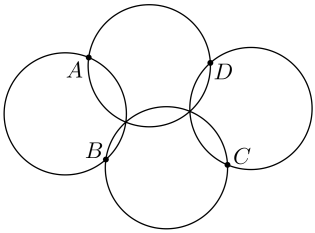
Геометрический разнобой

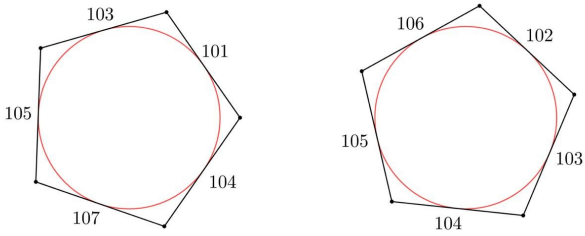
1. Четыре равных окружности расположены, как показано на рисунке. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.



2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

3. Площадь правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_{4n}$ равна S. Чему равна площадь четырёхугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$?

4. Даны два описанных пятиугольника (см. рисунок). Докажите, что радиусы вписанных окружностей равны.



5. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

6. **(а)** Из вершины A неравнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры на сторону BC и на прямые, содержащие медианы из вершин B и C. Оказалось, что окружность, проходящая через основания этих трёх перпендикуляров, касается стороны BC. Найдите угол BAC.

(б) Из вершины A неравнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры на прямые, содержащие медианы из вершин B и C. Они пересекают медианы в четырёх точках. Оказалось, что окружность, проходящая эти точки, касается стороны BC. Найдите угол BAC.

7. Прямая, проходящая через ортоцентр треугольника ABC, пересекает его стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Сторона BC, перпендикуляр к AB в точке D и перпендикуляр к AC в точке E образуют треугольник T. Докажите, что описанные окружности треугольников T и ABC касаются.

8. Угол A треугольника ABC равен 60°. Точки E и F — основания биссектрис углов B и C соответственно. Точки P и Q таковы, что четырёхугольники $BFPE$ и $CEQF$ являются параллелограммами. Докажите, что $\angle PAQ > 150^\circ$. (Рассматривается угол PAQ, который не содержит вершины B и C.)