Отбор на осенние сборы

1. Для некоторого квадратного трехчлена $f(x)$ и попарно различных вещественных a, b, c выполнено:

$$f(a) = bc, \quad f(b) = ac, \quad f(c) = ab.$$

Выразите $f(a+b+c)$ через a, b, c.

2. Пусть S — конечное множество натуральных чисел. Известно, что существует ровно 999 упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in S$, для которых произведение xy является квадратом (x и y не обязательно различны). Докажите, что из S можно выбрать четыре различных числа так, чтобы произведение любых двух из них не являлось квадратом.

3. Из вершины A неравнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры на сторону BC и на прямые, содержащие медианы из вершин B и C. Оказалось, что окружность, проходящая через основания этих трёх перпендикуляров, касается стороны BC. Найдите угол BAC.

4. В неизвестной стране располагается 2^n городов с названиями, состоящими из всевозможных строк длины n, состоящих из букв `A` и `B`. Если названия городов отличаются только одной буквой, то между ними проложены две дороги с односторонним движением (из одного города в другой и обратно). Найдите все n, для которых можно так пронумеровать дороги натуральными числами от 1 до n, чтобы ни из какого города не выходили две дороги с одинаковыми номерами, но при этом в каждый город входили бы дороги только с одинаковыми номерами.

5. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция, заданная на натуральных числах и принимающая натуральные значения, причем:

- $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$,
- $f(m) + f(n)$ кратно $m + n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что существует нечётное натуральное k такое, что $f(x) = x^k$ для всех натуральных x.