

Отбор на осенние сборы

1. Для некоторого квадратного трехчлена $f(x)$ и попарно различных вещественных a, b, c выполнено:

$$f(a) = bc, \quad f(b) = ac, \quad f(c) = ab.$$

Выразите $f(a + b + c)$ через a, b, c .

Ответ: $ab + ac + bc$.

Решение. Рассмотрим многочлен $g(x) = xf(x) - abc$. Несложно видеть, что a, b, c являются его корнями, а его степень равна 3. Значит, $g(x) = A(x - a)(x - b)(x - c)$, где A — некоторое вещественное ненулевое число. Свободный член $g(x)$ равен $-abc$, а свободный член $A(x - a)(x - b)(x - c)$ равен $-Aabc$. Значит, $A = 1$ или одно из a, b, c равно 0.

- Пусть $A = 1$, то есть $g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Обозначим $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$, тогда

$$xf(x) - r = g(x) = x^3 - px^2 + qx - r.$$

Значит, $f(x) = x^2 - px + q$, следовательно

$$f(a + b + c) = f(p) = p^2 - p^2 + q = q = ab + ac + bc.$$

- Пусть одно из a, b, c равно 0, без ограничения общности, a . Тогда, поскольку $bc \neq 0$, $f(b) = f(c) = 0$ и $f(0) = bc$, то $f(x) = (x - b)(x - c)$ ($f(x) = B(x - b)(x - c)$, $f(0) = Bbc$, а так как $b, c \neq a = 0$, то $bc \neq 0$ и $B = 1$) откуда

$$f(a + b + c) = bc = ab + ac + bc.$$

2. Пусть S — конечное множество натуральных чисел. Известно, что существует ровно 999 упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in S$, для которых произведение xy является квадратом (x и y не обязательно различны). Докажите, что из S можно выбрать четыре различных числа так, чтобы произведение любых двух из них не являлось квадратом.

Решение. Заметим, что если xy — полный квадрат и xz — полный квадрат, то yz также является полным квадратом. Действительно, $xy \cdot yz = a^2 \cdot b^2$, значит $yz = \frac{a^2 b^2}{x^2}$. Также, верно, что xx — полный квадрат. Тогда, можно представить S в виде $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S$ (где $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$), причем для любых $x, y \in S_i$ xy — полный квадрат, а для $x \in S_i, y \in S_j$ xy — не квадрат (выберем число и выделим подмножество чисел, которые в произведении с ним дают квадрат; скажем, что это множество — S_1 ; потом повторим для $S \setminus S_1$).

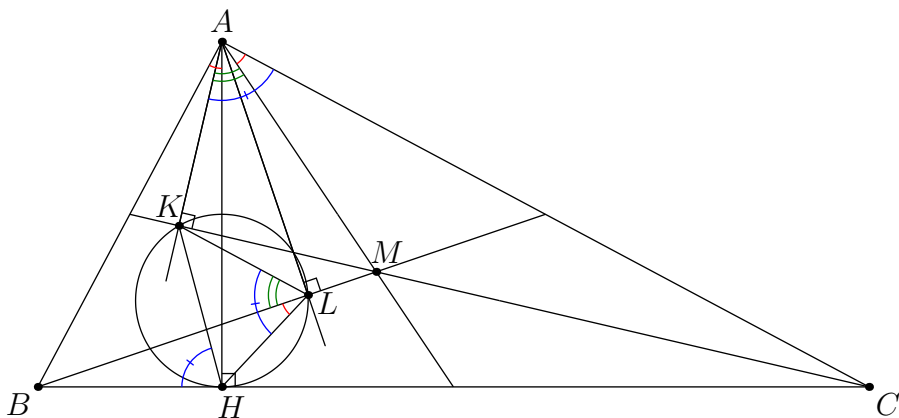
Любая пара элементов S , дающая в произведении полный квадрат находится в одном и том же множестве S_i , что также верно и в обратную сторону: любая пара элементов из любого подмножества S_i дает в произведении полный квадрат. Таких пар в S_i ровно $|S_i|^2$. Таким образом, количество пар из условия в точности равно $|S_1|^2 + |S_2|^2 + \dots + |S_n|^2$. Условие того, что надо найти четыре числа, никакие два из которых не дают в произведении полный квадрат эквивалентно тому, что $n \geq 4$ (если такие числа есть, то они лежат в разных подмножествах).

Докажем, что 999 нельзя представить в виде суммы менее чем четырех квадратов, что решит задачу. Рассмотрим, какие остатки может давать $|S_i|^2$ при делении на 8. Несложно понять, что это 0, 1, 4. Число 999 дает при делении на 8 остаток 7. Несложно видеть, что 7 не может быть сравнимо по модулю 8 с суммой не более чем трёх чисел, каждое из которых — это 0, 1 или 4. То есть 999 действительно нельзя представить в виде суммы менее чем четырех квадратов, поэтому должно быть хотя бы четыре подмножества S_i , что и требовалось.

3. Из вершины A неравнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры на сторону BC и на прямые, содержащие медианы из вершин B и C . Оказалось, что окружность, проходящая через основания этих трёх перпендикуляров, касается стороны BC . Найдите угол BAC .

Ответ: 90° .

Решение.



Пусть M — центроид треугольника ABC , O — центр описанной окружности, K — основание перпендикуляра из A на CM , L — на BM , H — на BC . Четырёхугольники $ALHB$, $AKHC$, $AKML$ вписанные, откуда

$$\begin{aligned} \angle BAH &= \angle BLH = \angle K LH - \angle K LB = \angle K HB - \angle K AM = \\ &= \angle K AC - \angle K AM = \angle MAC. \end{aligned}$$

Как известно, $\angle BAN = \angle OAC$, поэтому из полученного равенства следует, что O лежит на медиане AM . Серединный перпендикуляр к стороне BC не совпадает с медианой, поскольку треугольник не равнобедренный, поэтому пересекается с медианой в середине стороны BC , то есть O — это середина BC . Тогда $\angle BAC = 90^\circ$.

4. В неизвестной стране располагается 2^n городов с названиями, состоящими из всевозможных строк длины n , состоящих из букв А и В. Если названия городов отличаются только одной буквой, то между ними проложены две дороги с односторонним движением (из одного города в другой и обратно). Найдите все n , для которых можно так пронумеровать дороги натуральными числами от 1 до n , чтобы ни из какого города не выходили две дороги с одинаковыми номерами, но при этом в каждый город входили бы дороги только с одинаковыми номерами.

Решение. Будем называть *цветом* дороги номер, который ей сопоставлен. Назовем города *соседями*, если между ними проведены дороги.

Оценка. Посчитаем количество дорог каждого цвета. С одной стороны, оно должно быть равно 2^n , так как каждому городу можно сопоставить единственную выходящую из него дорогу заданного цвета. С другой стороны, в каждый город должно приходить n дорог одинакового цвета, а поэтому суммарное число дорог каждого цвета должно делиться на n . Значит, n должно быть делителем 2^n , то есть являться степенью двойки.

Пример. Вместо дорог будем красить города. Тогда в город цвета k будут входить дороги цвета k . Чтобы решить задачу достаточно придумать такую раскраску городов, чтобы соседи любого города были покрашены в разные цвета. Предъявим такую раскраску явно, предварительно сказав, для удобства, что красить мы будем в цвета $0, 1, \dots, n-1$. Пусть $n = 2^m$. Пронумеруем буквы в названии каждого города слева направо от 0 до $2^m - 1$. Тогда, цветом города будем считать следующее выражение: $\bigoplus_{i:c_i=A} i$,

где c_i — буква с номером i в названии города, а $\bigoplus$ — это XOR.

Рассмотрим это выражение подробнее. Рассмотрим все позиции i , в которых стоит буква А и переведем их в двоичную запись. Дополним полученную запись до длины m с помощью ведущих нулей. После этого рассмотрим четность количества единиц в первом разряде для всех i . Если оно нечетно, напомним в первом разряде итогового числа 1, а иначе 0. После повторим аналогичное действие для всех остальных разрядов. Таким образом мы получаем цвет города в двоичной записи. Стоит заметить, что в полученном числе не более чем m двоичных разрядов, что означает, что оно не превосходит $2^m - 1$. Заметим, что от изменения одной буквы А на букву В или наоборот в позиции i , итоговый цвет поменяет те и только те разряды, в которых у i стоят единицы (там, где стоят нули четность количества единиц не изменится, а там, где стоят единицы количество единиц увеличилось или уменьшилось на один).

Все названия соседей города получаются из названия этого города заменой одной буквы на каждой из позиций. Таким образом, цвета всех соседей получается из цвета города изменением всех разрядов, в которых стоят единицы у чисел $0, 1, \dots, 2^m - 1$ соответственно. А так как наборы этих разрядов у всех чисел различны (так как различны их двоичные записи), то и цвета всех соседей у любого города различны. Таким образом, получили требуемую раскраску городов.

5. Пусть $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — функция, заданная на натуральных числах и принимающая натуральные значения, причем:

- $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$,
- $f(m) + f(n)$ кратно $m + n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что существует нечётное натуральное k такое, что $f(x) = x^k$ для всех натуральных x .

Решение. Подставив в первое условие $n = m = 1$, получим $f(1) = f^2(1)$, значит $f(1) = 1$ ($0 \notin \mathbb{N}$). Подставив во второе условие $n = 1$ и 1 , получим

$$f(n-1) + 1 = f(n-1) + f(1) : n-1+1 = n,$$

то есть $f(n-1) \equiv -1 \pmod{n}$.

Докажем, что для любого простого p выполнено $f(p) = p^{k_p}$ для некоторого натурального k_p . Поскольку $f(p) + f(1)$ делится на $p+1$, то $f(p) \neq 1$. Предположим, $f(p) : q$, где q — отличное от p простое число. Тогда

$$f(p^{q-1}) + f(q-1) : p^{q-1} + q - 1,$$

что по малой теореме Ферма делится на q . С другой стороны,

$$f(p^{q-1}) = f(\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{q-1 \text{ раз}}) = \underbrace{f(p) \cdot f(p) \cdot \dots \cdot f(p)}_{q-1 \text{ раз}} = f(p)^{q-1} : q,$$

а $f(q-1) \equiv -1 \pmod{q}$, то есть

$$f(p^{q-1}) + f(q-1) \equiv -1 \pmod{q},$$

то есть $f(p^{q-1}) + f(q-1)$ не делится на q ; получаем противоречие. Следовательно, $f(p) = p^{k_p}$.

Далее будем рассматривать $p = 2$. Так как $f(2) + f(1) : 3$, то

$$f(2) = 2^{k_2} \equiv -1 \pmod{3},$$

то есть k_2 нечётно. Заметим, что

$$f(2^a) = f(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_a \text{ раз}) = \underbrace{f(2) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2)}_a \text{ раз} = 2^{ak_2}.$$

Рассмотрим выражение $f(n) + f(2^a)$. По второму свойству оно кратно $n + 2^a$. С другой стороны,

$$n^{k_2} + 2^{ak_2} = (n + 2^a)(n^{k_2-1} - \dots + 2^{a(k_2-1)}) : n + 2^a.$$

Вычитая это из $f(n) + f(2^a)$ получаем, что $f(n) - n^{k_2} : n + 2^a$ для любого натурального a . Взяв достаточно большое a (большее $\log_2(|f(n) - n^{k_2}| + 1)$), получим, что $|f(n) - n^{k_2}|$ меньше, чем его делитель, то есть $f(n) - n^{k_2} = 0$. Таким образом, $f(n) = n^k$ для некоторого нечетного k , что и требовалось.