Инварианты разрезаний

В этом листике мы поговорим про способ доказывать невозможность в задачах на разрезания. Основная идея листика — подобрать подходящую аддитивную функцию, то есть такую функцию f, что для любого разрезания фигуры M на фигуры M_1, M_2, …, M_k выполнено равенство

$$f(M) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_k).$$

Какие-то аддитивные функции вы уже использовали: длина, площадь, объём, сумма углов. Сегодня мы поговорим про более сложные примеры.

Инвариант Дена

Определение. Многоугольники (многогранники) называются *равновеликими*, если их площади (объёмы) совпадают. Два многоугольника (многогранника) называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на части, переложив которые, можно получить другой.

Очевидно, что любые два равносоставленных многоугольника (многогранника) равновелики. В двумерном случае верно и обратное утверждение (оно называется теоремой Бойяи — Гервина). А вот в пространстве обратное утверждение неверно. Для доказательства этого факта, нам потребуется следующая функция.

Определение. Пусть у многогранника M ровно k рёбер, их длины равны l_1, l_2, …, l_k, а величины двугранных углов при этих рёбрах равны φ_1, φ_2, …, φ_k соответственно. *Инвариантом Дена* многогранника M относительно функции f назовём величину

$$D_f(M) = \sum_{i=1}^{k} l_i f(\varphi_i),$$

где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая аддитивная функция, для которой $f(\pi) = 0$.

Существование такой функции мы обсуждали в прошлом году, когда описывали нетривиальные решения функционального уравнения Коши: $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Верен более общий факт: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ независимы над $\mathbb{Q}$, то существует аддитивная функция, принимающая в точках α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ наперёд заданные значения.

1. Докажите, что $D_f(M)$ — аддитивная функция.

2. **(а)** Найдите инвариант Дена куба.
(б) Докажите, что куб и правильный тетраэдр с одинаковыми объёмами не равносоставлены.

3. Рассмотрим тетраэдр, натянутый на три попарно перпендикулярных ребра одинаковой длины, отложенных от одной точки. Докажите, что он не равносоставлен ни кубу, ни правильному тетраэдру тех же объёмов.

4. Докажите, что инвариант Дена любой призмы равен 0.

5. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько правильных тетраэдров.

Оказывается, верно и обратное утверждение (Сидлер, 1965): если у двух многогранников совпадают объёмы и инварианты Дена (для любой допустимой функции f), то они равносоставлены.

Другие инварианты

6. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам прямых и дугам окружностей и составить из них квадрат?

7. **(а)** Пусть M — произвольный многоугольник. Нарисуем на каждой его стороне стрелку так, чтобы его внутренность была слева при обходе границы по стрелкам. Для направленной прямой ℓ обозначим через $J_\ell(M)$ сумму длин всех сторон многоугольника M, параллельных прямой ℓ, причём сонаправленные с прямой ℓ стороны берутся с плюсом, а противоположно направленные — с минусом (*инвариант Хадвигера*). Докажите, что $J_\ell(M)$ — аддитивная функция.
(б) Выпуклый многоугольник разрезан на центрально-симметричные многоугольники. Докажите, что он сам центрально-симметричен.
(в) Правильный треугольник T разрезали на многоугольники, каждый многоугольник параллельно перенесли. Могли ли они составить правильный треугольник, полученный из T отражением относительно одной из сторон T?

8. Для прямоугольника $M = x \times y$ (где x — вертикальная сторона, а y — горизонтальная) рассмотрим функцию $h(M) = f(x) \cdot g(y)$, где f и g — аддитивные функции. Докажите, что h — аддитивная функция.

9. **(а)** Докажите, что прямоугольник $a \times b$ можно разбить на квадраты тогда и только тогда, когда $a/b \in \mathbb{Q}$.
(б) Можно ли разрезать прямоугольный параллелепипед размера $2 \times 1 \times 1$ на прямоугольные параллелепипеды и составить из них куб?

10. Прямоугольник разбит на прямоугольники. У каждой прямоугольника разбиения длина хотя бы одной стороны целая. Докажите, что и у исходного прямоугольника длина хотя бы одной стороны целая.

11. Можно ли разбить квадрат на прямоугольники с отношением большей стороны к меньшей: **(а)** $\sqrt{2}$; **(б)** $1+\sqrt{2}$; **(в)** $2+\sqrt{2}$?

В последней задаче выполнен неожиданный общий критерий: квадрат можно разбить на прямоугольники с отношением сторон $r > 0$ тогда и только тогда, когда r — алгебраическое число и все его алгебраически сопряжённые имеют положительную действительную часть.