

Плотность числовой последовательности

1. Целые числа разбиты в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i . Пусть $S := \sum \frac{1}{d_i}$.
 - (а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.
 - (б) Набор из n натуральных чисел $d_1, d_2, \dots, d_n$ удовлетворяет равенству $\sum \frac{1}{d_i} = 1$. Обязательно ли множество целых чисел можно разбить в объединение n прогрессий с разностями d_i ?
 - (в) Докажите, что целые числа можно разбить на бесконечное число прогрессий так, что будет выполнено $S < 1$.
2. Целые числа разбиты в объединение 2017 непересекающихся бесконечных в обе стороны возрастающих арифметических прогрессий. Могло ли так получиться, что в каждой из прогрессий содержится простое число, превосходящее 2017?
3. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Итоги года оцениваются по n показателям, причём показатель с номером i может принимать любые натуральные значения от 1 до a_i . Год считается *тяжёлым*, если все показатели, за исключением не более чем одного, строго меньше, чем в предшествующем году. Пусть $S := \sum \frac{1}{a_i}$. Докажите, что если $S > 1$, то рано или поздно наступит лёгкий год.
4. (*Beatty sequence*) Дано иррациональное число $\alpha > 1$. Кузнечик прыгает по числовой прямой, стартуя из точки 0, каждый раз перемещаясь на α вправо. Луч $[1, +\infty)$ разбит натуральными точками на единичные полуинтервалы вида $[n, n+1)$. Обозначим множество всех номеров полуинтервалов, в которых побывает кузнечик, через $B_\alpha = \{[k\alpha] \mid k \in \mathbb{N}\}$.
 - (а) Докажите, что существует такое иррациональное число $\beta > 1$, что $B_\beta = \mathbb{N} \setminus B_\alpha$. Как должны быть связаны α и β ?
 - (б) Существуют ли три иррациональных числа $\alpha, \beta, \gamma > 1$ таких, что $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$, $B_\beta \cap B_\gamma = \emptyset$, $B_\gamma \cap B_\alpha = \emptyset$ и $B_\alpha \cup B_\beta \cup B_\gamma = \mathbb{N}$?
5. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что для любого натурального числа N как минимум 1% чисел множества $\{1, 2, \dots, N\}$ — красные. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность красных натуральных чисел такая, что ни один её член не кратен другому её члену.
6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых число $n^2 + 1$ свободно от квадратов, т. е. не делится ни на какой точный квадрат, отличный от 1.