

Плотность числовой последовательности

1. Целые числа разбиты в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i . Пусть $S := \sum \frac{1}{d_i}$.
 - (а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.
 - (б) Докажите, что целые числа можно разбить на бесконечное число прогрессий так, что будет выполнено $S < 1$.
2. Существуют ли 2017 непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2017, и лишь конечное количество натуральных чисел не лежит в их объединении?
3. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Итоги года оцениваются по n показателям, причём показатель с номером i может принимать любые натуральные значения от 1 до a_i . Год считается *тяжёлым*, если все показатели, за исключением не более чем одного, строго меньше, чем в предшествующем году. Пусть $S := \sum \frac{1}{a_i}$.
 - (а) Докажите, что если $S > 1$, то рано или поздно наступит лёгкий год.
 - (б) Докажите, что при $S \leq \frac{1}{2}$ могло так быть, что каждый год — тяжёлый.
4. (*Beatty sequence*) Дано иррациональное число $\alpha > 1$. Кузнечик прыгает по числовой прямой, стартуя из точки 0, каждый раз перемещаясь на α вправо. Луч $[1, +\infty)$ разбит натуральными точками на единичные полуинтервалы вида $[n, n+1)$. Обозначим множество всех номеров полуинтервалов, в которых побывает кузнечик, через $\mathcal{B}_\alpha = \{[k\alpha] \mid k \in \mathbb{N}\}$.
 - (а) Докажите, что существует такое иррациональное число $\beta > 1$, что $\mathcal{B}_\beta = \mathbb{N} \setminus \mathcal{B}_\alpha$. Как должны быть связаны α и β ?
 - (б) Существуют ли три иррациональных числа $\alpha, \beta, \gamma > 1$ таких, что $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta = \emptyset$, $\mathcal{B}_\beta \cap \mathcal{B}_\gamma = \emptyset$, $\mathcal{B}_\gamma \cap \mathcal{B}_\alpha = \emptyset$ и $\mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta \cup \mathcal{B}_\gamma = \mathbb{N}$?
5. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что для любого натурального числа N как минимум 1% чисел множества $\{1, 2, \dots, N\}$ — красные. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность красных натуральных чисел такая, что ни один её член не кратен другому её члену.
6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n , для которых число $n^2 + 1$ *свободно от квадратов*, т. е. не делится ни на какой точный квадрат, отличный от 1.
7. Дана функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющая двум условиям.
 - При всех $m, n \in \mathbb{N}$ число $\frac{f^{(n)}(m) - m}{n} \in \mathbb{N}$, где $f^{(n)}(m) = \underbrace{f(f(\dots f(m)))}_{n \text{ раз}}$.
 - f не принимает лишь конечное число значений.Докажите, что последовательность $a_m = f(m) - m$ периодична.